PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 23. 1. Dezember 1918. Redaktionsschluß für No. 1 am 1. Dezember 1918. 19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

J. Narbutt, Eine empirische Formel zur Berechnung der spezifischen Wärme des Wassers. S. 513.

J. E. Lilienfeld, Ergänzende Mitteilung zu der Arbeit: Untersuchungen über das kontinuierliche Röntgenspektrum. (Die Unabhängigkeit vom Antikathodenmetall.) S. 514.

Ph. Frank, Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion. S. 516.

J. Plotnikow, Das Erweichen und Biegen eines Kohlenstabes bei sehr hohen Temperaturen. (Vorlesungsversuch.) S. 520.

O. Meißner, Temperatur- und Regenveränderlichkeit in Berlin. S. 521.

E. Madelung, Das elektrische Feld in Systemen von regelmäßig angeordneten Punktladungen. S. 524.

K. Fehrle, Über die Berechnung des Ortes der chemischen Elemente im periodischen System aus dem Atomgewicht und der Dichte. S. 532.

Besprechungen:

H. Börner, Lehrbuch der Physik. S. 533.

G. Mohrmann, Physikalische Aufgabensammlung. S. 533.

E. Großmann, Untersuchungen über die astronomische Refraktion. S. 534.

F. Krauß, Die Grundgesetze der Wärmeleitung und ihre Anwendung auf plattenförmige Körper. S. 534.

F. Auerbach, Ernst Abbe. S. 534.

W. Ramsay u. G. Rudorf, Die Edelgase. S. 535.

Berichtigung. S. 535.

Personalien. S. 535.

Angebote. S. 536.

Gesuche. S. 536.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Eine empirische Formel zur Berechnung der spezifischen Wärme des Wassers.

Von J. Narbutt.

Im Verlauf einer größeren kalorimetrischen Untersuchung verwandte ich unter anderem Wasser zum Eichen des Nernstschen Kupferkalorimeters, wobei ich die verhältnismäßig geringe Übereinstimmung der von verschiedenen Beobachtern herrührenden Daten für die spezifische Wärme bei höheren Temperaturen recht störend empfand. Es waren nun aber gerade in den letzten Jahren (die Formel leitete ich im Sommer 1914 her, aber kann sie erst jetzt in einer deutschen Zeitschrift veröffentlichen[1]) mehrere schöne experimentelle Untersuchungen über die spezifische Wärme des Wassers publiziert worden, welche ein gutes Material für die Herleitung einer empirischen Formel für die mittlere spezifische Wärme von 0° bis etwa 100° zu versprechen schienen.

Von diesen Arbeiten bevorzugte ich die von Lüdin[2]), Dieterici[3]), Bousfield[4]), Callendar[5]) und Barnes und Cooke[6]) nicht allein deshalb, weil sie mit großer Sorgfalt ausgeführt worden, sondern auch deshalb, weil die Beobachtungen nach sehr verschiedenen Methoden angestellt worden waren. Den Daten und Formeln der genannten Forscher entnahm ich die mittleren spezifischen Wärmen (c_{15} gleich 1 gesetzt) zwischen 0° und 10°, 20° usw. bis 100° und bildete aus den erhaltenen Zahlen, denen ich gleiche Genauigkeit zuschrieb, Mittelwerte, aus welchen dann die vierkonstantige Formel (3) unter Zuhilfenahme der Methode der kleinsten Quadrate hergeleitet wurde. Der Anschluß der Formel an die Mittelwerte ist ein völlig befriedigender, wie aus der Tabelle I zu ersehen ist.

Zur nachstehenden Tabelle I ist noch folgendes kurz zu bemerken:

Der in der Kolumne „Callendar" mit einem Sterne bezeichnete Wert ist von Barnes und Cooke (l. c.) experimentell bestimmt, die übrigen Werte sind nach einer von Callendar (l. c.) gegebenen und von mir ein wenig geänderten Formel (1) (Callendar hatte bei seinen Rechnungen $c_{20} = 1$ gesetzt), berechnet worden:

$$c_0{}^t = 0{,}9988\left[0{,}98536 + \frac{1{,}1605}{t}\log\frac{t+20}{20} + \right.$$
$$\left. + 0{,}0_4 42\, t + 0{,}0_6 3\, t^2\right] \quad (1)$$

Die Werte in der Kolumne „Bousfield" sind von mir nach der Formel (2) berechnet worden, welche aus einer von Bousfield (l. c.) hergeleiteten erhalten wurde. Die 15°-Kalorie setzte ich dabei gleich 4,184 Joule. Die beiden letzten Werte in dieser Kolumne sind durch Sterne gekennzeichnet, weil die Versuche der beiden Bousfield bis 80° reichten.

$$c_0{}^t = 1{,}00588 - 0{,}0_3 3611\, t + 0{,}0_5 6241\, t^2 - $$
$$- 0{,}0_7 2928\, t^3 \quad (2)$$

In der Kolumne „Dieterici" stehen die der Dietericischen Tabelle entnommenen Werte,

1) Vgl. meine Abhandl., Schriften d. Naturforscher-Gesellschaft bei der kaiserl. Universität Jurjew XXIII, 35, 1916.

2) E. Lüdin, Fortschr. d. Phys. 56 (II), 304. 1900.

3) C. Dieterici, Ann. d. Phys. [4] 16, 610, 1905.

4) W. R. und W. E. Bousfield, Phil. Transact. 11, 236, 1911.

5) H. Callendar, Proc. Roy. Soc. Ser. A. 86, 257, 1912.

6) H. T. Barnes und H. L. Cooke, Phys. Rev. 15, 71, 1902.

die alle um 0,0020 vergrößert wurden. Dieterici hatte bei seinen Rechnungen die Bunsensche Kalorie gleich eins gesetzt und ferner experimentell gefunden, daß eine Bunsensche Kalorie 4,1925 Joule äquivalent ist und daß bei der Abgabe einer solchen Wärmemenge in seinem Eiskalorimeter 15,491 mg Quecksilber eingesogen wurden. Nach Barnes[1]) ist die 15^0-Kalorie 4,184 Joule äquivalent, und nach Behn[2]) werden bei ihrer Abgabe im Eiskalorimeter 15,460 mg Quecksilber eingesogen. Hieraus folgt, daß Dietericis Zahlen mit 1,0020 zu multipizieren oder einfacher um 0,0020 zu erhöhen sind. — Schließlich mag noch darauf hingewiesen werden, daß der von Dieterici errechnete Wert c_0 mit dem von Barnes und Cooke experimentell gefundenen zusammenfällt.

Die Zahlen in der Kolumne „Lüdin" entstammen der Lüdinschen Arbeit[3]) (l. c.).

Tabelle I.

Die mittlere spezifische Wärme des Wassers von 0^0 bis t^0 ($c_{15} = 1$).

t^0	Callendar	Bousfield	Dieterici	Lüdin	Mittel	Nach Form. (3) ber.
0	1,0094*	1,0059	1,0095	1,0051	1,0075	1,0073
10	1,0051	1,0029	1,0060	1,0029	1,0042	1,0042
20	1,0026	1,0006	1,0030	1,0014	1,0019	1,0020
30	1,0011	0,9996	1,0004	1,0008	1,0005	1,0006
40	1,0002	0,9993	0,9993	1,0006	0,9999	1,0000
50	0,9996	0,9998	0,9994	1,0010	1,0000	0,9998
60	0,9994	1,0003	0,9996	1,0017	1,0003	1,0001
70	0,9994	1,0011	1,0000	1,0026	1,0008	1,0007
80	0,9996	1,0019	1,0005	1,0035	1,0014	1,0014
90	0,9999	1,0026*	1,0012	1,0045	1,0021	1,0021
100	1,0004	1,0029*	1,0020	1,0052	1,0026	1,0025

$$c_0{}^t = 1{,}00733 - 0{,}0_3\,3708\,t + 0{,}0_5\,5615\,t^2 - 0{,}0_7\,2388\,t^3 \quad (3)$$

$$c_t = 1{,}00733 - 0{,}0_3\,7416\,t + 0{,}0_4\,16845\,t^2 - 0{,}0_7\,9552\,t^3 . \quad (3a)$$

Nach der Formel (3a) liegt das Minimum der wahren spezifischen Wärme zwischen 29^0 und 30^0.

Früher hatte ich (l. c.) die Genauigkeit der nach (3) berechneten mittleren spezifischen Wärmen von 0^0 bis 80^0 auf ca. ein Promille und weiter bis 100^0 auf ca. zwei Promille geschätzt. Daß die damalige Schätzung nicht zu hoch ausgefallen ist, dürfte nun aus den von Jaeger und v. Steinwehr[1]) ausgeführten sorgfältigen und genauen Messungen der wahren spezifischen Wärme des Wassers hervorgehen. In folgender Tabelle II habe ich einige von Jaeger und v. Steinwehr, nach denen die 15^0-Kalorie gleich 4,1842 Joule ist, gemessene Werte mit aus (3a) berechneten zusammengestellt, und es ist deutlich zu sehen, daß meine Formel sich der Erfahrung gut anschließt.

Tabelle II.

Die wahre spezifische Wärme des Wassers ($c_{15} = 1$).

t_0	Von Jaeger und v. Steinwehr beob.	Nach Form. (3a) ber.	Diff.
10	1,00135	1,0015	— 0,0001
20	0,9990	0,9985	+ 0,0005
30	0,9979	0,9977	+ 0,0002
40	0,99815	0,9985	— 0,0003
50	0,9996	1,0004	— 0,0008

Nach Jaeger und v. Steinwehr liegt das Minimum bei $33{,}5^0$.

Es erscheint also nunmehr die Möglichkeit wohl gegeben, die mittlere spezifische Wärme bis 100^0 mit einer größeren Sicherheit als bisher zu berechnen.

Dorpat, im Juli 1918.

(Eingegangen 28. Juli 1918.)

1) H. T. Barnes, Proc. Roy. Soc. Ser. A. 82, 390, 1909.

2) U. Behn, Ann. d. Phys. [4] 18, 663, 1905.

3) Dieterici (l. c. 618) findet, daß Lüdins Kurve für die wahre spezifische Wärme zwischen 0^0 und 30^0 sehr beträchtlich niedriger als seine liegt. Wenn man aber berücksichtigt, daß Dieterici irrtümlicherweise die Kolumne der spezifischen Wärmen von Lüdin mit $c_0 = 1$ anstatt $c_{15} = 1$ zum Vergleich heranzieht, so findet man, selbst nach Anbringung einer geringen Korrektion an den Dietericischen Werten (weil der in die Kurve eingetragene Wert von c_{15} 0,9987 beträgt), welche die letzteren noch etwas mehr erhöht, eine beträchtlich bessere Übereinstimmung.

1) W. Jaeger und H. v. Steinwehr, Sitzber. d. königl. preuß. Akad. d. Wiss. 1915, 424. — Infolge des Krieges habe ich nur ein Referat einsehen können, welches mir erst im Jahre 1917 zugänglich wurde.

Ergänzende Mitteilung zu der Arbeit[1]): Untersuchungen über das kontinuierliche Röntgenspektrum. (Die Unabhängigkeit vom Antikathodenmetall.)

Von J. E. Lilienfeld.

Mit Tafel X.

Die Fassung der Ergebnisse der im Titel angeführten Arbeit ist in doppelter Hinsicht zunächst unbestimmt gelassen worden.

Erstens wurde beim Vergleiche des unter Nutzung einer Platin-Iridium-Antikathode erzeugten kontinuierlichen Spektrums mit demjenigen am Molybdän erzeugten behauptet, die

1) Diese Zeitschr. 19, 263—269, 1918.

Intensitätsverteilung in beiden Spektren wäre die gleiche. Hingegen wurde über die Beträge der Schwärzungen gleicher Wellenlängengebiete in beiden Spektren lediglich angegeben, sie wären von der gleichen Größenordnung. Ich bin gegenwärtig in der Lage, über ein umfangreicheres Material von Aufnahmen zu verfügen. Eine Anzahl davon ist unter tunlicher Einhaltung gleicher photographischer Bedingungen hergestellt worden. Angesichts der Wichtigkeit der Frage seien hier nochmals zwei Vergleichsaufnahmen wiedergegeben, die bei gleicher Belastung und in der gleichen Expositionszeit von 15 Minuten gewonnen wurden. Ein Unterschied in der Schwärzung fällt in keinem Bereiche der beiden Spektren auf. Selbst dicht in der Umgebung der Platin-Iridium-K-Strahlung weichen sie voneinander nicht merklich ab. Es kann aus den Aufnahmen entgegen den von Rutherford, Barnes und Richardson, auch von anderen, neuerdings von Webster, vertretenen Ansichten ersehen werden, daß sehr wohl ein kontinuierliches Spektrum erzeugt werden kann, welches sich mit der Eigenstrahlung des Antikathodenmetalls nicht nur der Intensitätsverteilung, sondern auch der absoluten Intensität nach nicht merklich ändert.

Derartig übereinstimmende Spektrogramme an verschiedenen Antikathodenmetallen ergeben sich stets, wenn Aufnahmen mit großen Strahlenintensitäten (bedeutenden Elektronendichten im Brennfleck), also in kurzen Expositionszeiten, gemacht werden. Ferner ist für die Entstehung gut übereinstimmender kontinuierlicher Spektren allem Anscheine nach von Wert, daß der Entladungsvorgang in der Röhre von einem möglichst steil verlaufenden Anstieg und Abfall in der Kurve des den Entladungsvorgang erzeugenden pulsierenden Gleichstroms begleitet sei. Hingegen scheinen Aufnahmen, die mit geringen Intensitäten oder mit erheblich flacherer Kurvenform der an die Röhre angelegten Spannung gemacht sind, hinsichtlich der absoluten Intensität gleicher Wellenbereiche nicht übereinzustimmen. Vielleicht ist das auf nebensächliche Beeinflussungen verschiedener Art zurückzuführen, möglicherweise aber aus den andersartigen Entladungsbedingungen zu erklären. Deshalb möchte ich es vorläufig dahingestellt sein lassen, ob unter von den obigen abweichenden Entladungsbedingungen nicht doch erheblichere Unterschiede in der absoluten Intensität der Spektralbereiche beobachtet werden können. Die Intensitätsverteilung hängt aber beim gesamten, bisher vorliegenden Plattenmaterial in keiner merklichen Weise mit der Eigenstrahlung der Antikathode zusammen.

Die zweite Unbestimmtheit meiner ursprünglichen Arbeit betraf die Frage, ob der Schwärzungssprung, der aus den Aufnahmen 1, 2, 3, (Tafel VI) zu erkennen ist, den Spektren selbst wesentlich anhaftet oder ob er durch irgendeinen Nebenvorgang in die Spektrogramme hereingebracht wurde. Ich sah ursprünglich von der Erörterung dieser Frage ab, indem ich es als Zweck meines Aufsatzes betonte, auf die Unabhängigkeit der Bremsstrahlung vom Antikathodenmetall aufmerksam zu machen. Inzwischen ist die Frage nach der Ursache dieses Schwärzungssprunges aber durch eine Mitteilung, die Herr Manne Siegbahn mir zukommen ließ, geklärt worden. Der scheinbare Intensitätssprung ist in der Tat auf eine sekundäre Ursache zurückzuführen, und zwar auf die selektive Absorption der Wolframschneiden, welche den Spalt bei der Seemannschen Lochkamera-Methode bilden in derjenigen Ausführung, in welcher mir der Apparat geliefert wurde.

Die photographische Untersuchung des kurzwelligsten Teiles des Spektrums ist in der Tat noch nicht so durchgearbeitet gewesen, daß eine derartige Entstellung der Intensitätsverteilung hätte vorausgesehen werden können. Bekanntlich bewegen sich die meisten bisherigen Arbeiten vorwiegend in einem verhältnismäßig langwelligen Gebiet. Selbst wenn man sich die Ergebnisse der Arbeit über die Absorption der Röntgenstrahlen von Hull und Rice eingehend überlegt hat, wird man durchaus davon überrascht, daß durch die Absorption im Metalle die Intensitätsverteilung auf eine Entfernung von weit mehr als einer Oktave von der Eigenfrequenz so außerordentlich beeinflußt werden kann. Die diesmal wiedergegebenen Aufnahmen sind mit einem hinreichend erweiterten Spalt gemacht worden. Der Absorptionsfehler in den Wolfram-Spalträndern kommt dann beinahe gar nicht mehr in Frage und man sieht, daß derjenige Teil des Spektrums, welcher kurzwelliger ist als die Platin-Iridium-K-Strahlung, hier eine Schwärzung hervorgerufen hat, welche durchaus von der gleichen Größenordnung ist wie die Schwärzung der unmittelbar angrenzenden langwelligen Teile des Spektrums. Sicherlich ist auch die in meiner gemeinsam mit Herrn Seemann veröffentlichten Arbeit Fig. 1 und auf der Tafel VII dargestellte Intensitätsverteilung (diese Zeitschr. 19, 269—271, 1918) nur unter Berücksichtigung der Absorption in den Wolfram-Spalträndern richtig zu deuten.

Die Tatsache, daß die Schwermetalle denjenigen Teil des Spektrums, der kurzwelliger ist als ihre Eigenstrahlung, so sehr viel mehr

schwächen als den unmittelbar angrenzenden langwelligen Teil des Spektrums, ist auch dafür verantwortlich gewesen, daß Rutherford, Barnes und Richardson ein Anwachsen der Strahlenhärte mit der Spannung nur bis zu einer verhältnismäßig niedrigen Grenze (140 Kilovolt) beobachtet haben. Diese Autoren benutzten zum großen Teile das Kriterium der Absorption in verhältnismäßig starken Bleischichten, um die Strahlung zu beurteilen. Man kann sich aber, wenn man eine Spektralaufnahme unter Vorschaltung eines Bleifilters macht, mit Leichtigkeit überzeugen, daß dieses Bleifilter so gut wie gar keine Wellenlängen hindurchläßt, welche kürzer sind als die Blei-K-Strahlung. Durch ein Bleifilter tritt vielmehr nur die der Eigenstrahlung des Bleies entsprechende, sowie die K-Strahlung des Antikathoden-Schwermetalls (Pt, Ir, Wo) mit merklicher Intensität hindurch. Wird also unter Vorschaltung verschiedener Bleifilterdicken der Absorptionsexponent im Aluminium gemessen, wie das die genannten Autoren taten, so kommt dabei ein Ergebnis heraus, welches einer Bande entspricht, die zwischen der Blei-K-Strahlung, und der Wo-K-Strahlung liegt. Das ergibt aber einen Absorptionsexponenten, der sich durchaus mit demjenigen deckt, welcher in der erwähnten englischen Arbeit als der kleinste mit einer Wolfram-Antikathode erreichbare angegeben wird. Dabei ist aber nicht das Antikathodenmaterial schuld an dem mangelnden Anstiege der Härte, sondern das angewandte Bleifilter.

(Eingegangen 31. Juli 1918.)

Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion.

Von Philipp Frank.

Man sagt gewöhnlich, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion sei im Gegensatz zur endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elastischen und elektrischen Störungen unendlich groß. Darunter versteht man das folgende: Wenn die Konzentration einer diffundierenden Substanz zur Zeit Null nur in einem begrenzten Raumteil von Null verschieden (z. B. konstant), sonst aber im ganzen Raum Null ist, so wird nach jeder noch so kurzen Zeit in jedem noch so weit entfernten Raumpunkt die Konzentration bereits einen von Null verschiedenen Wert haben. Dieser mathematischen Folgerung aus der Diffusionsgleichung steht gegenüber, daß erfahrungsgemäß die Diffusion sogar sehr langsam erfolgt, was sich einfach dadurch erklärt, daß die Konzentration zwar sofort überall von Null verschieden ist, es aber doch sehr lange dauern kann, bis sie einen experimentell nachweisbaren Betrag erreicht.

Diese ganze Theorie hat natürlich nur einen Sinn, wenn man sich auf den Standpunkt der stetigen Verteilung der Materie im Raum stellt. Wenn die diffundierende Substanz aber aus einer endlichen Anzahl von Molekülen besteht, kann ihre Konzentration nicht sofort überall von Null verschieden ein, sondern es muß eine ganz bestimmte Zeit vergehen, bis das erste Molekül in die betreffende Gegend des Raumes kommt. Es muß also eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestehen; diese muß sich auch experimentell feststellen lassen, da wir ja nach der heutigen Auffassung in Teilchen, die in Brownscher Bewegung begriffen sind, ein makroskopisches Bild der molekularen Diffusion vor uns haben.

Im folgenden soll also zunächst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion in diesem Sinne untersucht werden, also die Geschwindigkeit, mit der sich der „Kopf" eines Teilchenschwarmes fortbewegt, wobei sich verfolgen läßt, wie diese Geschwindigkeit mit wachsender Teilchenzahl unbegrenzt wächst und sich so dem Werte ∞ nähert, den sie bei Annahme stetiger Raumerfüllung in der klassischen Diffusionstheorie hat.

Anhangsweise soll dann noch kurz die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion in einem anderen Sinne behandelt werden, nämlich als Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Konzentrationsmaximums, worauf schon Fourier bei der Wärmeleitung hingewiesen hat; auch diese Betrachtung wird auf die Brownsche Bewegung angewendet.

§ 1.

Wir wollen uns auf die Diffusion in einer bestimmten Richtung, die wir zur x Richtung wählen, beschränken, weil sich in diesem Falle schon alles grundsätzlich Wichtige besprechen läßt. Die Diffusionstheorie sagt unter der Annahme stetiger Raumerfüllung bekanntlich folgendes aus: Bezeichnen wir mit $w(x,t)$ die Konzentration zur Zeit t an der Stelle x, d. h. befindet sich zu dieser Zeit die Substanzmenge $w(x,t)dx$ in der Schichte zwischen den Ebenen mit den Abszissen x und $x+dx$, so genügt diese Funktion der Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

wo D die Diffusionskonstante ist. Dabei muß, um das Problem eindeutig zu machen, zur Zeit $t = 0$ noch die Konzentration w als Funktion des Ortes x gegeben sein.

An Stelle dieser Theorie tritt nach Einstein und Smoluchowski, wenn man die diffundierende Substanz als molekular aufgebaut ansieht, die folgende Grundlage:

Wenn wir von einer bestimmten Anfangsverteilung der Teilchen ausgehen und beobachten, was aus dieser Verteilung nach Ablauf der Zeit t geworden ist, so wird nicht immer dieselbe Endverteilung entstehen. Betrachten wir aber das arithmetische Mittel aus der Anzahl der Teilchen, die sich bei sehr vielen Versuchen mit derselben Anfangsverteilung nach der Zeit t zwischen x und $x + dx$ befinden und nennen diese Zahl wieder $w(x,t)\,dx$, so genügt diese mittlere Anzahl wieder der Differentialgleichung (1).

Wir wollen nun von dem einfachsten Fall ausgehen, daß sich zur Zeit $t = 0$ alle Teilchen, N an der Zahl, in der Ebene $x = 0$ befinden mögen. Die dieser Anfangsbedingung angepaßte Lösung der Gl. (1) lautet bekanntlich:

$$w(x,t) = \frac{N}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \qquad (2)$$

Wollen wir das Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit aufsuchen, so müssen wir fragen, wieviele Teilchen sich zur Zeit t im Mittel bereits um eine Strecke, die größer als ζ ist, von der Anfangslage entfernt haben; diese Anzahl nennen wir $W(\zeta)$; es ist offenbar

$$W(\zeta) = 2\int_{\zeta}^{\infty} w(x,t)\,dx. \qquad (3)$$

Wir führen nun das Gaußsche Fehlerintegral $\Phi(x)$ ein:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-x^2}\,dx$$

und die daraus abgeleitete Funktion $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = 1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \qquad (4)$$

dann ergibt sich aus (3) durch Einsetzen von (2)

$$W(\zeta) = N\,\Psi\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{Dt}}\right). \qquad (5)$$

Es fragt sich nun, wo sich zur Zeit t die Grenze zwischen dem von Teilchen erfüllten und dem von Teilchen noch leeren Raum befindet. Da wegen der molekularen Zusammensetzung der diffundierenden Substanz diese Grenze nicht bei jedem Versuch genau dieselbe Lage hat, so kann man nur fragen, welches im Mittel die Abszisse dieser Grenze ist. Man legt sie wohl am einfachsten so fest, daß man fragt, außerhalb welchen Gebietes zur Zeit t sich gerade erst im Mittel ein einziges Teilchen befindet; die Grenzabszisse ζ ist dann einfach durch die Gleichung

$$W(\zeta) = 1 \qquad (6)$$

bestimmt, d. h. aber nach Gl. (5)

$$\Psi\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{Dt}}\right) = \frac{1}{N}, \qquad (7)$$

Wenn wir die Gleichung

$$\Psi(x) = \frac{1}{N} \qquad (8)$$

nach x auflösen, erhalten wir eine Funktion

$$x = f(N), \qquad (9)$$

die offenbar, wenn N von 1 bis ∞ wächst, monoton von 0 bis ∞ wächst. Ihre Werte lassen sich leicht mit Hilfe der Tabellen des Gaußschen Fehlerintegrals berechnen.

Das Gesetz, nach dem sich die Grenze des von Teilchen erfüllten Gebietes fortschiebt, ist dann durch

$$\zeta = 2f(N)\sqrt{Dt} \qquad (10)$$

gegeben. Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit keine konstante ist, aber hier wie im folgenden immer dieselbe zeitliche Abhängigkeit zeigt, nämlich die der mittleren Verschiebung eines in Brownscher Bewegung begriffenen Teilchens, so wollen wir als Maß für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einfach den in der ersten Sekunde zurückgelegten Weg γ ansehen, den wir dann eben als die Geschwindigkeit des „Kopfes" des Teilchenschwarmes bezeichnen können

$$\gamma = 2f(N)\sqrt{D}. \qquad (11)$$

Wenn N ins Unendliche wächst, wird auch γ unendlich und wir haben dann wieder den Fall der klassischen Diffusionstheorie vor uns, die sich also hier als Grenzfall einordnet. Zur Diskussion der Formel (11) empfiehlt es sich vielleicht, die Werte der Funktion $f(N)$ für einige kleinere Werte des Arguments zusammenzustellen.

Tabelle I.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(N)$	0	0,48	0,68	0,81	0,91	0,98	1,04	1,09	1,13

N	10	100	1000
$f(N)$	1,16	1,83	2,32

Für sehr große Werte des Arguments kann man eine Näherungsformel angeben, wenn man von der folgenden bekannten semikonvergenten Entwicklung von $\Psi(x)$ ausgeht[1]):

$$\Psi(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \cdots\right). \qquad (12)$$

1) Siehe z. B. Jahnke und Emde, Funktionentafeln, IX. S. 31.

Wenden wir nun die erste Näherung an, so erhalten wir nach Gl. (8) die Funktion $f(N)$ durch Auflösung der Gleichung

$$\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} = \frac{1}{N}.$$

Diese Näherung ist für sehr große N anwendbar, da ja $f(N)$ mit N ins Unendliche wächst, also einem großen N auch ein großes x entspricht. Bilden wir auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus und vernachlässigen $\log x$ gegenüber x, so ergibt sich

$$x = \sqrt{\lg N},$$

also für unsere gesuchte Funktion der Näherungswert

$$f(N) = \sqrt{\lg N}. \qquad (13)$$

Es ist zu beachten, daß diese Formel nur gültig ist, wenn $\lg N$ schon groß gegen $\lg\lg N$ ist.

Um eine Vorstellung vom zahlenmäßigen Betrage dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu gewinnen, wollen wir etwa einen Wert von D zugrunde legen, wie er bei der Brownschen Bewegung von Quecksilberteilchen in Wasser vorkommt. Bei der von R. Fürth[1]) beobachteten Quecksilberemulsion ist ungefähr:

$$D = 10^{-8}\,\mathrm{cm^2 sec^{-1}}.$$

Dann ist nach Gl. (11)

$$\gamma = 2 \times 10^{-4} \cdot f(N)\,\mathrm{cm}.$$

Für $N = 6$ hat die Funktion f nach unserer Tabelle I etwa den Wert 1 und es ist

$$\gamma = 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{cm}.$$

Aber auch für tausend Teilchen hat nach derselben Tabelle der Weg, den der Kopf des Teilchenschwarmes in der ersten Sekunde zurücklegt, erst den Wert

$$\gamma = 4{,}6 \times 10^{-4}\,\mathrm{cm}.$$

Wenn wir für N eine Zahl von der Größenordnung der Loschmidtschen Zahl nehmen, also etwa $\lg N = 25$ setzen, können wir für f schon die Näherungsformel (13) anwenden, aber auch da erhalten wir erst

$$\gamma = 10^{-3}\,\mathrm{cm}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wächst also wohl mit wachsender Teilchenzahl ins Unendliche, aber, wie man sieht, äußerst langsam.

Das hier behandelte Problem läßt sich auch anders formulieren: Es seien N Teilchen in Brownscher Bewegung begriffen. Man betrachte ihre Verschiebungen in einer Zeit t und merke sich die Verschiebung desjenigen Teilchens, das in dieser Zeit die größte Verschiebung erleidet. Man wiederhole dann diesen Versuch mit N Teilchen sehr oft und bilde das arithmetische Mittel aus den so beobachteten Maximalverschiebungen. Dafür muß sich offenbar auch die durch Gl. (10) gegebene Größe ζ ergeben[1]). Anstatt N Teilchen zu beobachten, kann man natürlich auch ein Teilchen in N Zeitabschnitten, von denen jeder die Länge t hat, beobachten. Auch hier ist die mittlere Maximalverschiebung durch Gl. (10) gegeben.

Diese Gleichung ist aber überhaupt eigentlich nur eine mathematische Formel der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wenn wir das mittlere Verschiebungsquadrat einführen:

$$\overline{\Delta^2} = 2Dt \qquad (14)$$

läßt sich Gl. (10) schreiben:

$$\zeta = \sqrt{2 f(N)}\sqrt{\overline{\Delta^2}}. \qquad (15)$$

Wenn ich als Ergebnis von N Versuchen eine Reihe von Zahlen erhalte, die sich nach dem Gaußschen Fehlergesetz mit dem mittleren Fehlerquadrat $\overline{\Delta^2}$ verteilen, und ich zahlreiche solcher Serien von N Versuchen, immer mit demselben Präzisionsmaß mache, und ich bei jeder Serie das am weitesten vom Mittelwert abweichende Messungsgebiet aussuche und aus allen diesen Maximalabweichungen das Mittel nehme, so ist dieses Mittel offenbar immer durch Gl. (15) gegeben.

Auf ganz anderen wahrscheinlichkeitstheoretischen Sätzen beruht die Untersuchung von Smoluchowski[2]) über die mittlere maximale Abweichung eines Brownschen Teilchens aus seiner Ruhelage. Hier wird nämlich nicht die größte in einer dieser N Zeitstrecken erlittene Verschiebung genommen, sondern die größte innerhalb der N Zeitstrecken erreichte Entfernung aus der Anfangslage.

§ 2.

Etwas verwickelter wird das Gesetz für die Fortpflanzung des Kopfes eines Teilchenschwarmes, wenn man sich zur Zeit $t = 0$ nicht alle Teilchen in einer Ebene versammelt denkt. Wir wollen den Fall behandeln, daß zur Zeit $t = 0$ die Teilchen den ganzen Halbraum $x < 0$ mit konstanter Dichte erfüllen, während der Halbraum $x > 0$ frei von Teilchen ist. Es wird wieder gefragt, nach welchem Gesetz sich die Lage des von Teilchen erfüllten Raumteils verschiebt. Im

1) R. Fürth, Ann. d. Phys. 53, 195, 1917.

1) Diesen Versuch hat K. Przibram angestellt (diese Ztschr. 15, 766, 1914). Er gibt dort auch eine von F. Hasenöhrl ihm mitgeteilte theoretische Ableitung an, die für diese mittlere Maximalverschiebung eine Formel ergibt, die für sehr große N mit unsrer Formel (10) übereinstimmt. Für kleinere N ist sie, wie die Ableitung überhaupt, wesentlich komplizierter.

2) v. Smoluchowski, Wiener Ber. 124, 263, 1915.

Halbraum $x<0$ möge am Anfang auf eine Schichte von der Dicke dx die Anzahl $n\,dx$ Teilchen kommen.

Dann ist Gl. (1) unter den Anfangsbedingungen zu lösen, daß

$$w(x,0)=n \quad \text{für} \quad x<0$$
$$w(x,0)=0 \quad \text{für} \quad x>0. \qquad (16)$$

Nun lautet die allgemeine Lösung, wenn $w(x,0)=\varphi(x)$, eine willkürlich gegebene Funktion ist, bekanntlich[1]:

$$w(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4Dt}}\,d\alpha. \qquad (17)$$

Daraus ergibt sich für die Anfangsbedingungen (16)

$$w(x,t)=\frac{n}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4Dt}}\,d\alpha. \qquad (18)$$

Bezeichnen wir mit $W(\xi)$ die Anzahl der Teilchen, die zur Zeit t um mehr als ξ von der ursprünglichen Grenzfläche $x=0$ entfernt sind, so ist jetzt, weil nur Stellen mit positiver Abszisse in Betracht zu ziehen sind,

$$W(\xi)=\int_{\xi}^{\infty}w(x,t)\,dx \qquad (19)$$

also nach (18)

$$W(\xi)=\frac{n}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{\xi}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{0}d\alpha\cdot e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4Dt}} \qquad (20)$$

Das läßt sich mit Hilfe der in Gl. (4) definierten Funktion schreiben:

$$W(\xi)=n\sqrt{Dt}\int_{\frac{\xi}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}\Psi(x)\,dx. \qquad (21)$$

Führen wir die Hilfsfunktion $X(x)$ ein:

$$X(x)=\int_{x}^{\infty}\Psi(\alpha)\,d\alpha, \qquad (22)$$

so läßt sie sich durch partielle Integration auf $\Psi(x)$ zurückführen; es ist nämlich

$$X(x)=-x\,\Psi(x)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}. \qquad (23)$$

Diese Funktion X hat im allgemeinen denselben Charakter wie Ψ. Wenn x von 0 bis ∞ wächst, nimmt $X(x)$ monoton von $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ bis 0 ab.

1) Vgl. Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der mathem. Physik. 5. Aufl. Bd. II, § 37.

Die Lage der Grenzabszisse ξ zur Zeit t wird wieder einfach durch Gl. (6) bestimmt. Diese lautet aber hier wegen Gl. (21) und (22)

$$X\left(\frac{\xi}{2\sqrt{Dt}}\right)=\frac{1}{n\sqrt{Dt}}. \qquad (24)$$

Wir bezeichnen die Auflösung von

$$X(x)=\frac{1}{y} \qquad (25)$$

nach x, mit

$$x=F(y). \qquad (26)$$

Wenn y von $\sqrt{\pi}$ bis ∞ wächst, so wächst auch $F(y)$ monoton von 0 bis ∞. Die Abszisse ξ für den Kopf unseres Teilchenschwarmes lautet dann nach Gl. (24)

$$\xi=2F(n\sqrt{Dt})\sqrt{Dt}. \qquad (27)$$

Dieses Gesetz ist schon ein recht kompliziertes. Wenn wir wieder den in der ersten Sekunde zurückgelegten Weg als Maß für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ansehen, so sieht man jedenfalls, daß sie ins Unendliche wächst, wenn die auf die Schichtdicke 1 im Anfang entfallende Teilchenzahl ins Unendliche wächst. Mit Hilfe von Gl. (23) ließe sich für die Funktion F eine Tabelle aus der Tafel des Gaußschen Fehlerintegrals herleiten. Wir wollen uns an dieser Stelle aber begnügen, eine Näherungsformel für große Werte des Arguments anzugeben.

Wenn wir für $\Psi(x)$ die schon einmal angewendete Näherungsformel (12) benutzen und uns wieder nur mit dem ersten Gliede begnügen, ergibt sich nach Gl. (23) für X der Näherungswert Null. Wir müssen also in Formel (12) auch das zweite Glied berücksichtigen; dann erhalten wir

$$X(x)=\frac{1}{2x^2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}. \qquad (28)$$

Daraus ist nun der Näherungswert für F herzuleiten. Wir nehmen wieder auf beiden Seiten von Gl. (25) den natürlichen Logarithmus, dann ist wegen (28)

$$\lg(2x^2)+\lg\sqrt{\pi}+x^2=\lg y. \qquad (29)$$

Daraus ergibt sich für sehr große x wieder

$$F(y)=x=\sqrt{\lg y}. \qquad (30)$$

Für sehr großes Argument ist also F mit der durch Gl. (8) und (9) definierten Funktion f identisch. Die Strecke ξ, die der Kopf des Teilchenschwarms in der Zeit t zurücklegt, ist also in unserem Fall durch dieselbe Formel gegeben, wie wenn zur Zeit 0 alle N Teilchen in einer Ebene versammelt gewesen wären. Es muß dabei nur das Argument von F in Gl. (27) sehr groß sein, d. h. die Anzahl der Teilchen, die auf eine Schichte von der Dicke $\sqrt{Dt}$ entfallen, muß sehr groß sein. Die Verschiebung des „Kopfes" ist dann zur Zeit t so groß, als wären am An-

fang alle diese $n\sqrt{Dt}$ Teilchen in der Ebene $x = 0$ versammelt gewesen.

§ 3.

Der hier behandelte Begriff der Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat nur bei Annahme molekularer Zusammensetzung der Materie einen Sinn. Wir wollen nun noch kurz darauf hinweisen, daß man von Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion auch noch in einem anderen Sinne sprechen kann, der auch bei Annahme stetiger Raumerfüllung bestehen bleibt. Wir knüpfen dabei an eine Betrachtung, die Fourier[1]) für die Wärmeleitung angestellt hat, an.

Wir betrachten wieder den Fall, daß zur Zeit $t = 0$ alle N Teilchen sich in der Ebene $x = 0$ befinden. Wir fassen die Schichte von der Abszisse x und der Dicke dx ins Auge und fragen uns, zu welcher Zeit t sich die meisten Teilchen in dieser Schichte befinden. Dadurch erhalten wir eine Beziehung zwischen x und t, die wir als das Gesetz für die Fortpflanzung des Konzentrationsmaximums bezeichnen können. Die gesuchte Beziehung lautet offenbar

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

wo w der durch Gl. (2) gegebene Ausdruck ist. Wegen Gl. (1) kann an Stelle dieser Beziehung auch

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad (31)$$

gesetzt werden. Nun ist nach Gl. (2)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{N}{4\sqrt{\pi}(Dt)^2} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(\frac{x^2}{2Dt} - 1 \right). \qquad (32)$$

Daher lautet das gesuchte Gesetz:

$$x^2 = 2Dt, \qquad (33)$$

d. h. das Maximum der Konzentration pflanzt sich nach demselben Gesetz fort wie ein einzelnes Teilchen sich im Mittel verschiebt, wenn man als Maß dafür die Wurzel aus dem mittleren Verschiebungsquadrat ansieht.

Auf diese Formel läßt sich vielleicht auch eine neue experimentelle Bestimmung des Diffusionskoeffizienten und daher der Loschmidtschen Zahl aus der Brownschen Bewegung gründen. Man denkt sich zur Zeit $t = 0$ alle Teilchen in der Ebene $x = 0$. Das läßt sich experimentell, wie Herr R. Fürth mich aufmerksam gemacht hat, am besten dadurch verwirklichen, daß man sie an eine in dieser Ebene befindliche feste Wand anpreßt. Dadurch wird allerdings die Bewegung nach der einen Seite verhindert, was aber nur zur Folge hat, daß die Konzentration überall zweimal so groß wird als in Gl. (2) angegeben ist, während das Gesetz (33) für die Fortpflanzung des Maximums unverändert bleibt. Man zählt dann einfach in einer Schichte von der Abszisse x in kurzen aufeinanderfolgenden Zeitintervallen die darin befindliche Anzahl der Teilchen, und sucht denjenigen Zeitpunkt heraus, wo die meisten Teilchen angetroffen werden. In dieser Methode kommt unmittelbar gar keine Mittelwertsbildung vor.

Man kann vielleicht, wenn wir wie üblich die Mittelwertsbildung durch Querstriche bezeichnen, unsere Fouriersche Formel (33) den anderen ganz ähnlich gebauten gegenüberstellen, die zur Bestimmung des Diffusionskoeffizienten dienen.

$$\overline{x^2}\,\frac{1}{t} = 2D. \qquad \text{(Fourier)}$$

Hier ist t die Zeit, die das Konzentrationsmaximum zum Durchlaufen der Strecke x braucht.

$$\overline{x^2}\,\frac{1}{t} = 2D. \qquad \text{(Einstein)}$$

Hier wird der Mittelwert über die verschiedenen x^2 gebildet, die während gleich langer Zeiten t zurückgelegt werden.

$$x^2\overline{\left(\frac{1}{t}\right)} = 2D. \qquad \text{(Schrödinger[1])}$$

Hier ist der Mittelwert über die verschiedenen „einseitigen" Erstpassagezeiten gebildet, die bei verschiedenem Durchlaufen derselben Strecke x gebraucht werden.

$$x^2\,\frac{1}{t} = 2D. \qquad \text{(Fürth[2])}$$

Wenn statt der „einseitigen" Erstpassagezeiten die „doppelseitigen" genommen werden, tritt an Stelle der Schrödingerschen Formel die Fürthsche.

1) Fourier, Théorie analytique de la chaleur. Chap. IX. Sect. III. Art. 387.

1) Schrödinger, diese Ztschr. 16. 289, 1915. Siehe auch v. Smoluchowski im selben Band S. 318, und D. Konstantinowsky im selben Band S. 369.

2) R. Fürth, a. a. O.

(Eingegangen 5. August 1918.)

Das Erweichen und Biegen eines Kohlenstabes bei sehr hohen Temperaturen (Vorlesungsversuch)[1]).

Von Joh. Plotnikow.

Im Herbst 1914, während der Vorbereitung der Moissanschen Versuche für die Vor-

1) Kurzer Auszug aus dem Ber. der Petersburger Akademie vom Jahre 1917 (Seite 883).

lesung, hatte ich beobachtet, daß ein Kohlenstab von 5 mm Durchmesser und etwa 20 cm Länge bei dem Durchlassen eines Stromes von etwa 100 Ampère bei 110 Volt unter der Einwirkung der Schwere sich ein wenig einbiegt. Diese Erscheinung konnte auf die Weise gedeutet werden, daß bei dieser Temperatur eine schwache Erweichung der Kohle stattfindet. Einen stärkeren Strom konnte ich nicht durchschicken, weil mir kein entsprechendes Rheostat zur Verfügung stand. Erst im Herbst 1916 wurde ein solcher nach meinen Angaben konstruiert und ich konnte meine Versuche bei günstigeren Bedingungen wiederholen. Die Versuchsanordnung war eine sehr einfache. Ein Kohlenstab von etwa 50 mm Durchmesser war am Stativ befestigt, den anderen hielt ich in der Hand. Zwischen den beiden wurde ein Kohlenstab von 5 mm Durchmesser und von der Länge 10 bis 30 cm, wie es in der Fig. 1

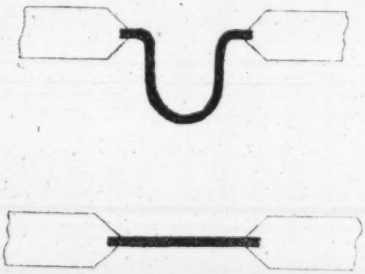


Fig. 1.

angegeben ist, eingestellt. Alsdann wurde der Strom durchgelassen. Bei 150 Ampère fühlte man deutlich das Weichwerden des Stabes; bei 200 Ampère ist es noch größer. Beim vorsichtigen Drücken mit der Hand, in der sich der freie Kohlenstab befand, konnte man den dünnen weißglühenden Kohlenstab zu einem Bogen biegen. In der Fig. 2 ist eine Anzahl von mir gebogener Kohlenstäbe abgebildet.

Im Februar 1917 hatte ich die Gelegenheit gehabt, in der Hauptstation für elektrische Straßenbeleuchtung diese Versuche mit Strömen bis zu 800 Ampère zu wiederholen und konnte eine Biegung von Stäben von 15 mm Durchmesser erzielen. Die Versuche erfordern eine gewisse Übung, damit sie gut gelingen, sonst brechen die Kohlenstäbe sehr leicht. Außerdem sind diese Versuche auch gefährlich, aber sehr effektvoll. Zu dieser Zeit erhielt ich auf Umwegen die interessante Monographie von Lummer über die Verflüssigung

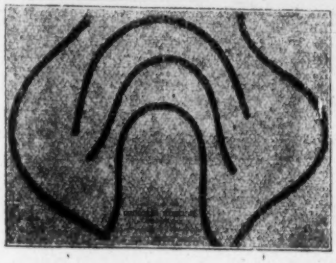


Fig. 2.

der Kohle. Beim Vergleich meiner Versuche mit den seinigen kam ich unwillkürlich auf den Gedanken, ob die Verflüssigung nicht besser gelingen wird, falls sie mit dieser Methode des Erhitzens von Kohlenstaub (selbstverständlich bei entsprechend veränderten Versuchsbedingungen) erzielt wird.

Moskau, den 1. August 1918.

(Eingegangen 19. August 1918.)

Temperatur- und Regenveränderlichkeit in Berlin.

Von Otto Meißner.

§ 1. Einleitung. In seinem Werke über das Klima von Berlin gibt Hellmann[1]) auch Werte für die „mittlere Abweichung" der Monatsmittel für Temperatur- (1848—1907) und Niederschlagshöhe oder Regenmenge (aus 1848—1890) an. Der von Dove eingeführte Ausdruck „mittlere" Abweichung[2]) sollte aber jetzt, wo sich erfreulicherweise Ausgleichungsrechnung und Kollektivmaßlehre auch in der Meteorologie immer mehr einzubürgern beginnt, durch den sachgemäßeren: „durchschnittliche" Abweichung ersetzt werden, denn es handelt sich hier tatsächlich[3]) um die einfache Summierung der Abweichungen der Einzeljahrgänge vom Mittel und Division durch die Anzahl der Beobachtungsjahre.

Andererseits ist es natürlich auch von großem Interesse, die „mittlere" Abweichung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen sowie beide zu vergleichen. Schließlich habe ich außerdem noch die mittlere Veränderlichkeit, d. h. die Differenzen der Monatsmittel eines

1) Das Klima von Berlin. I. Teil. Niederschläge, Gewitter. S. 109 [35]. II. Teil. Lufttemperatur. S. 63.

2) Vgl. z. B. Supan, Physische Erdkunde, 3. Aufl. S. 101.

3) Wie die Ausrechnung, die sicherheitshalber vorgenommen wurde, gleichfalls lehrte.

Tabelle I.

	Temperatur (1848—1907)						Niederschlag (1848—1890)					
	D. A.	M. A.	M. V.	M. A. / D. A.	M. V. / M. A.	1000 K	D. A.	M. A.	M. V.	M. A. / D. A.	M. V. / M. A.	1000 K
Januar	2°,31	2°,07	4°,00	1,29	1,34	+ 382	39,5	48,5	72,0	1,23	1,48	+ 104
Februar	2,22	2,82	3,94	1,27	1,40	+ 110	56,4	68,1	93,0	1,21	1,36	+ 198
März	1,69	2,07	2,95	1,22	1,43	+ 636	44,5	62,0	88,7	1,39	1,43	+ 95
April	1,30	1,55	2,48	1,19	1,60	+ 207	46,5	59,7	79,7	1,28	1,33	+ 35
Mai	1,46	1,92	2,86	1,31	1,49	+ 120	41,1	56,7	80,6	1,38	1,42	— 234
Juni	1,05	1,43	2,08	1,36	1,45	— 55	39,5	51,2	62,0	1,29	1,21	— 56
Juli	1,22	1,41	1,97	1,16	1,39	— 13	43,1	63,0	94,1	1,46	1,50	— 46
August	1,08	1,32	1,90	1,22	1,44	+ 244	43,6	53,1	73,6	1,21	1,38	+ 108
September	0,99	1,20	1,61	1,21	1,34	+ 386	43,0	52,9	76,7	1,23	1,45	+ 182
Oktober	1,26	1,57	2,21	1,25	1,40	+ 114	46,9	62,2	87,6	1,32	1,41	— 184
November	1,39	1,72	2,40	1,24	1,39	— 193	45,9	57,1	81,1	1,24	1,42	— 59
Dezember	1,87	2,37	3,72	1,26	1,57	+ 353	43,7	56,1	76,4	1,27	1,36	0
c_0 (Mittel)	1,49	1,86	2,76	1,25	1,44	+ 191	44,5	57,5	80,5	1,29	1,40	+ 12
c_1	0,54	0,70	1,00	.	.	115	.	.	.	.	.	53
φ_1	30°	31°	35°	.	.	41°	.	.	.	.	.	18°
c_2	0,22	0,30	0,67	.	.	167	.	.	.	.	.	120
φ_2	37°	30°	332°	.	.	114°	.	.	.	.	.	93°
c_4	0,09	0,10	0,11	.	.	150	.	.	.	.	.	40
φ_4	108°	129°	130°	.	.	131°	.	.	.	.	.	3°
$Q = \frac{2A}{B}$	3,38	3,57	3,44	1,13	1,01	1,03	0,84	0,76	0,74	0,83	0,67	1,26

Jahrgangs und des vorhergehenden, berechnet. Dabei haben sich interessante Resultate ergeben.

§ 2. Die neue Berliner Reihe. Tabelle I (s. u.) gibt zunächst für die „neue" Berliner Reihe, d. h. seit Beginn der amtlichen Beobachtungen, für Temperatur und Regen die

durchschnittliche Abweichung (D. A.)
mittlere „ (M. A.)
„ Veränderlichkeit (M. V.),

ferner die Verhältnisse, deren theoretische Werte:

$$\frac{\text{M. A.}}{\text{D. A.}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sim 1{,}25$$

$$\frac{\text{M. V.}}{\text{M. A.}} = \sqrt{2} \sim 1{,}41$$

sind, dann die Anfangsglieder der Cosinusreihe für die Konstanten, die eine jährliche Periode aufweisen (konst. $= c_0 + c_1 \cos(30\,\mathrm{m} - \varphi_1) + \cdots$, $\mathrm{m} = \frac{1}{2}$ für Januar usf.). K bezw. 1000 K endlich ist der Korrelationsfaktor[1]) für die Beziehung zwischen den Abweichungen der Werte zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Monate, und zwar bezieht sich K für Januar auf Dez./Jan. usw. $Q = \frac{2A}{B}$, worin A die Quadratsumme der Abweichungen, B die Summe der Quadrate der Abweichungsdifferenzen $\varepsilon_{\nu+1} - \varepsilon_\nu$ ist. Der mittlere Fehler von Q ist durchweg $\frac{1}{\sqrt{12-1}} = \pm 0{,}30$.

§ 3. Die Temperaturveränderlichkeit der neuen Reihe. Die Diskussion der Temperaturveränderlichkeit der neuen Berliner Reihe auf Grund von Tab. I liefert folgende Ergebnisse:

Das Verhältnis M. A. : D. A. und M. V. : M. A. zeigt keine Jahresperiode und ist auch normal. Daß M. V. : M. A. fast genau den theoretischen Wert ergibt, ist sehr bedeutsam, denn es zeigt, daß in der 60jährigen Berliner Temperaturreihe von 1848—1907 keine Periodizität von erheblicher Größe aufgetreten ist (sonst müßte das Verhältnis kleiner sein[1])). Wir werden später sehen, daß dies nicht zu allen Zeiten der Fall gewesen ist.

D. A., M. A. und M. V. zeigen übereinstimmend eine ausgesprochene, sich auch in dem hohen Werte von Q zeigende, jährliche Periode von „verkehrt-thermischem Charakter" d. h. Maximum im Winter (hier Ende Januar). Auch die kleine $^1/_2$- und die noch kleinere $^1/_4$-jährliche Periode, jedenfalls durch die „zu kleinen" Werte

1) Dieser ist bekanntlich, wenn x_ν und y_ν zusammengehörige Abweichungen zweier Größen x y von Mittel x_m y_m sind, durch

$$K = \frac{\Sigma x_\nu y_\nu}{\sqrt{\Sigma(x_\nu^2)\,\Sigma(y_\nu^2)}}$$

definiert.

1) Ich habe allerdings auch in der neuen Berliner Temperaturreihe die Sonnenfleckenperiode gefunden, aber sie ist im Vergleich zu den aus anderen Ursachen stammenden Unregelmäßigkeiten zu gering, um sich in Q geltend machen zu können. (Astr. Nachr. **204**, Nr. 4885, Mai 1917.)

für April und September hervorgerufen, stimmen in den Phasen nicht schlecht überein, und auch die Amplitudenquotienten $\frac{c_2}{c_1}$ und $\frac{c_4}{c_1}$ sind ziemlich gleich.

Der Gang von K ist groß, aber, wie der fast normale Wert von Q zeigt, nicht verbürgt. Am ausgesprochensten ist eine Neigung zu gleichsinniger Temperaturabweichung im Spätwinter (Februar-März) vorhanden. Auch das Mittel zeigt diese Neigung noch. Im Sommer ist sie nicht vorhanden. Die Werte von K haben eine gewisse prognostische Bedeutung, auf die ich aber an dieser Stelle nicht eingehen will.

§ 4. Die Regenveränderlichkeit der neuen Reihe. Hier beziehen sich die abgeleiteten Konstanten nicht auf die absoluten Werte der Regenmenge, vielmehr hat Hellmann in durchaus sachgemäßer Weise die Abweichungen in Prozenten des Mittelwerts angegeben. Infolgedessen existiert hier keine jährliche Periode mehr, da, wie ich auch an anderer Stelle zu zeigen gedenke, die Veränderlichkeit der Niederschlagshöhe mit dieser selbst fast genau proportional wächst. Auch die Werte von K sind hier kleiner und schwanken, so daß man aus der Regenhöhe eines Monats nur sehr unsichere Schlüsse auf die des nächsten ziehen kann.

Daß Q durchweg kleiner als 1 ist, bedeutet eigentlich, daß sich die Abweichungen vom Mittel „zu rasch", d. h. schneller als bei reiner Zufallsverteilung, ausgleichen. Doch darf man auf diesen Umstand kein besonderes Gewicht legen.

§ 5. Die Temperaturveränderlichkeit der Kirchschen Reihe. Der Astronom Kirch (J. G.) hat schon 1719 in Berlin mit Temperaturbeobachtungen begonnen, die von ihm und Sohn und Tochter, freilich mit einer großen Lücke in den 20er Jahren, bis 1751 fortgeführt sind. Obwohl Hellmann diese Beobachtungen[1]) für nicht vollwertig hält, schien mir doch die Berechnung von D. A., M. A. und M. V. auch für diese Reihe angebracht, weil man ja gerade dadurch eventuell auch erwarten konnte, etwaige Inhomogenitäten zu finden. Das Ergebnis ist in Tabelle II zu finden, wo nur noch q aufgenommen ist, das die gleiche Bedeutung wie Q hat, und sich auf die Abweichungen der Einzeljahrgänge von Mittel (wie Q auf die der Monats- vom Jahresmittel) bezieht[2]); q' ist das Mittel je dreier aufeinanderfolgender Werte.

1) Wie ich an anderer Stelle nachzuweisen beabsichtige, mit Unrecht.

2) Und nur auf die lückenlose Beobachtungsperiode 1730—1751.

Tabelle II.

	D. A.	M. A.	M. V.	$\frac{\text{M. A.}}{\text{D. A.}}$	$\frac{\text{M. V.}}{\text{M. V.}}$	q	q'
Januar	2,°01	2,°63	3,°68	1,31	1,40	1,11	0,95
Februar	2,04	2,67	4,18	1,30	1,57	0,88	1,13
März	1,88	2,31	2,86	1,23	1,24	1,41	1,16
April	1,62	1,93	2,62	1,20	1,36	1,18	1,41
Mai	1,37	1,81	2,10	1,32	1,16	1,65	1,60
Juni	1,52	1,82	1,95	1,19	1,07	1,97	1,91
Juli	1,19	1,51	1,57	1,27	1,04	2,10	2,29
August	1,20	1,55	1,42	1,22	0,90	2,71	2,07
September	0,78	1,04	1,36	1,33	1,31	1,39	1,70
Oktober	1,15	1,68	2,36	1,46	1,41	1,00	1,43
November	1,77	2,34	2,58	1,32	1,10	1,89	1,25
Dezember	1,45	2,03	3,30	1,39	1,63	0,85	1,28
c_0 (Mittel)	1,50	1,95	2,50	1,29	1,27	1,51	1,51
c_1	0,45	0,57	1,15	.	.	.	0,53
φ_1	40°	38°	31°	.	.	.	196°
c_2	0,11	0,15	0,21	.	.	.	0,12
φ_2	15°	53°	25°	.	.	.	120°
c_3	0,13	0,15	0,19	.	.	.	0,09
φ_3	193°	182°	124°	.	.	.	256°
$Q = 2A:B$	2,41	2,56	4,18	1,34	1,28	1,34	4,77

Zunächst seien die Mittelwerte für die Kirchsche und die neue Reihe zusammengestellt:

	D. A.	M. A.	M. V.	$\frac{\text{M. A.}}{\text{D. A.}}$	$\frac{\text{M. V.}}{\text{M. A.}}$
Kirch	1,50	1,95	2,50	1,29	1,27
neue Reihe	1,49	1,86	2,76	1,25	1,41

Diese Werte stimmen bis auf das letzte Paar so gut überein, und auch φ_1 ist so für beide Reihen im Mittel nur um 8°, φ_2 um 15° — beides etwa einer Woche entsprechend — verschieden, daß man hiernach jedenfalls die Kirchschen Beobachtungen als den neueren gleichwertig ansehen kann, während der kleine Wert für das Verhältnis M. V.: M. A. auf eine Temperaturschwankung von längerer Periode deutet und einer gesonderten Untersuchung bedarf.

§ 6. Die Brücknersche Periode in der Kirchschen Reihe. Um diese Periodizität genauer zu untersuchen, sind die Werte von q berechnet. Die ausgeglichenen Werte q' zeigen eine, bei den q nur durch das Herausfallen des Novemberwertes verwischte, starke jährliche Periodizität, und zwar sind die q' von November bis März, also in der kalten Jahreszeit, ziemlich normal (nahe bei 1), von Mai bis September aber viel zu groß, d. h.

„es ist in den Kirchschen Temperaturbe-
„obachtungen von 1730—1751 eine langjährige
„Schwankung vorhanden, die aber nur im
„Sommer scharf hervortritt, im Winter jedoch
„völlig verwischt ist."

Ich habe schon wiederholt gezeigt[1]), daß Perio-

1) Astr. Nachr. 204, Nr. 4885. Annalen der Hydrographie usw. 45, 186.

dizitäten je nach den Jahreszeiten verschieden deutlich hervortreten, z. T. in der Phase derartig verschieden, daß man bei der üblichen Benutzung lediglich der Jahresmittel überhaupt so gut wie nichts mehr erhält!

Es ist nun noch die Frage, um was für eine Periode es sich handelt. Man sieht es schon den Einzelwerten an, daß es nur die Brückner-Periode sein kann. Ich habe dies jedoch noch genauer gezeigt mit Hilfe des erweiterten Abbe-Helmertschen Zufallskriteriums[1]). Bildet man nämlich für eine Reihe außer der Fehlerquadratsumme

$$S_1 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2$$

nacheinander die Summen

$$S_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + \cdots + (\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)^2$$
$$S_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2 + \cdots + (\varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)^2,$$

so muß theoretisch

$$S_\nu = \frac{\nu(n-\nu)(n-\nu+1)}{n(n-1)} S_1$$

sein. Aus dem Werte des Quotienten $\overline{S_\nu}$ (beob.): $\overline{S_\nu}$ (ber.) kann man über die systematischen Einflüsse bezw. vorhandene Periodizitäten Rückschlüsse ziehen. Ist nämlich eine sich über 2ν Reihenglieder erstreckende Periode vorhanden, so haben die Werte des Quotienten bei ν ein Maximum, bei 2ν ein Minimum.

Statt $\overline{S_\nu}$ kann man auch die leichter zu berechnenden Größen

$$S_\nu^* = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_\nu)^2 + (\varepsilon_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+2} + \cdots + \varepsilon_{2\nu})^2 + \cdots$$

und ihre Quotienten — theoretisch ist angenähert:

$$S_\nu^* \sim \frac{n-\nu+1}{n} S_1^* -$$

benutzen. Diese bequemere Methode ist dafür natürlich entsprechend ungenauer. Beides ist für die Augustmonate (1730—1751) in Tabelle III ausgeführt.

Tabelle III.

ν	S_ν^* beob.	S_ν^* ber.	S_ν^* Qu.	$\overline{S_\nu}$ beob.	$\overline{S_\nu}$ ber.	$\overline{S_\nu}$ Qu.
1	5362	5362	1,00	5362	5362	1,00
2	8302	5118	1,63	13179	1,82 $\overline{S_1}$	1,35
3	10338	4814	2,12	20540	2,47 „	2,00
4	16834	4630	3,64	36816	2,97 „	2,31
5	11404	4386	2,60	43209	3,32	2,42
6	19914	4142	4,82	50767	3,53	2,69
7	12572	3838	3,22	57284	3,64	2,68
8	20310	3654	5,56	64427	3,64	3,30
9	21186	3210	6,59	69618	3,54	3,68
10	9446	2966	3,19	71133	3,39	3,93
11	16936	2722	6,22	72401	3,14	4,29
12	19216	2478	7,78	72957	2,86	4,77
13	26000	2234	11,7	65301	2,53	4,83
14	24208	1990	12,2	62500	2,19	5,32
15	27386	1746	15,6	55904	1,83	5,69
16	26458	1502	17,6	44949	1,45	5,77
17	38808	1258	30,9	34183	1,11	5,77
18	27456	1014	27,0	22483	0,78	5,38
19	11456	770	14,9	10378	0,49	3,96
20	5490	516	10,4	4553	0,26	3,27
21	3370	282	(12,0)	2817	0,09	(5,8)

Auf beide Arten erhält man für den Quotienten bei $\nu = 17$ ein Maximum, und zwar mit großer Schärfe. Das bedeutet also, daß eine Periode von $2 \times 17 = 34$ Jahren vorliegt, d. h. eben die Brücknersche.

§ 7. Zusammenfassung. Wir haben demnach folgende Ergebnisse:

1. Die Temperatur- und Regenveränderlichkeit der neuen Berliner Reihe (seit 1848) ist völlig normal.

2. Die Brückner- und Sonnenfleckenperiode ist in dieser Zeit so gering im Vergleich zu den unregelmäßigen Schwankungen kürzerer Dauer, daß sie zu ihrer Ermittelung besonderer Methoden bedürfen.

3. Es liegt kein Grund vor, die alte Kirchsche Temperatur-Reihe als inhomogen anzusehen.

4. In der Zeit von 1730—1750 ist in den Sommermonaten die Brücknerperiode sehr deutlich erkennbar. Im Winter wird sie auch hier durch die zufälligen Änderungen völlig verwischt.

Potsdam, 27. August 1918.

(Eingegangen 29. August 1918.)

Das elektrische Feld in Systemen von regelmäßig angeordneten Punktladungen.

Von E. Madelung.

Die Berechnung des elektrischen Feldes im Innern von Atomgittern, deren Bestandteile elektrische Ladungen tragen, bietet große Schwierigkeiten, wenn man versucht, dasselbe durch direkte Summation zu ermitteln. Es ist nämlich, wie man bei einem praktischen Versuch sofort sieht, eine ungeheuer große Anzahl von Punkten zu berücksichtigen, wenn man eine einigermaßen hinreichende Genauigkeit erreichen will. Andrerseits muß diese Berechnung von Bedeutung sein, sobald wir etwas Genaueres über die Art und Größe der zwischen den Atomen wirkenden „molekularen“ Kräfte wissen und auf Grund dieser Kenntnis versuchen werden, die Bedingungen des atomistischen Aufbaues der Kristalle rechnerisch zu verfolgen. Denn wenn auch wohl die molekularen Kräfte praktisch nur

1) Zeitschr. f. Vermessungswesen 46, 169 ff.

zwischen nächsten Nachbarn wirken und daher relativ einfach in die Rechnung eingehen, fallen die elektrischen Kräfte nur nach einer schwachen Potenz der Entfernung ab, so daß eine Beschränkung auf die nächsten Nachbarn durchaus unzulässig ist.

Ich beabsichtige, im folgenden Formeln zu entwickeln, die die Berechnung des elektrischen Feldes außerordentlich erleichtern. Methoden hierfür sind bisher wohl nur von Ewald[1]) und Born[2]) gegeben worden. Beide entwickeln das Feld im Elementarparallelepiped des Kristalls nach 3 parametrigen Fourierschen Reihen. Abgesehen von der schwächeren Konvergenz dieser Formeln im Verhältnis zu den meinigen bleibt bei diesen Ansätzen die Berechnung in der Nähe der Gitterpunkte oder in ihnen selbst unmöglich. Eine von Ewald gegebene Methode, dies letztere auch zu erreichen, ist nur für rechtwinklige Dipolgitter durchgeführt. Sie scheint mir nicht entfernt die Anpassungsfähigkeit meiner Methode zu besitzen; tatsächlich ist Ewalds Ziel auch nicht dasselbe wie meines, da er sich nur mit dynamischen Feldern befaßt, während ich ausschließlich statische behandeln will.

Als Grundproblem betrachte ich die Berechnung des Feldes einer äquidistant mit gleichen Ladungen belegten Geraden. Dies Problem ist deshalb von Bedeutung, weil solche Punktreihen als die Bausteine aller überhaupt möglichen Kristalle betrachtet werden können. Daran schließt sich die Berechnung des Feldes, eines ebenen Liniengitters, eines rechtwinkligen und eines schiefwinkligen ebenen Punktgitters und der entsprechenden Raumgitter. Hieraus folgen die Formeln für gemischte Gitter, d. h. solcher, die aus positiven und negativen Ladungen bestehen. Jede Symmetrie ergibt natürlich eine Vereinfachung.

Durch geeignete Tabellen ist eine weitere Erleichterung zu erreichen. Solche Tabellen gedenke ich an andrer Stelle zu veröffentlichen.

Ich beabsichtige auch, nach derselben Methode andre für die Gittertheorie wichtige Summationen später zu behandeln.

1. Das Feld einer geraden Punktreihe.

Die Punkte liegen auf einer Geraden in Abständen a und tragen die Ladung E. Die Koordinaten seien: x parallel zur Geraden und r senkrecht dazu. Der Nullpunkt sei ein Punkt der Reihe.

Ich setze das Potential an in der Form:

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(r) \cos 2\pi \frac{l x}{a}$$

als Summe von Einzelpotentialen V_l und fordere, daß für jedes $\Delta V_l = 0$ sei, also

$$\frac{\partial^2 V_l}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_l}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_l}{\partial x^2} = 0;$$

das ergibt

$$\frac{d^2 f_l(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d f_l(r)}{dr} - \frac{4\pi l^2}{a^2} f_l(r) = 0.$$

Diese Gleichung führt auf Zylinderfunktionen. Es ist nun evident, daß der periodische Teil des Gesamtpotentials V im Unendlichen verschwinden muß. Deshalb kommen als Lösung nur die Hankelschen Funktionen K_0 in Frage. Es wird daher:

$$f_l(r) = C_l \cdot K_0\left(\frac{2\pi l r}{a}\right),$$

wo die Konstanten C_l noch zu bestimmen sind.

(Die Funktion $K_0(x)$ hat folgende Eigenschaften: Sie wird für große x gleich

$$e^{-x}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

und für kleine x gleich $\ln\left(\frac{2}{\gamma x}\right)$; wo $\ln\gamma = 0{,}5772$ die Eulersche Konstante ist. Eine Tabelle für $K_0(x)$ und die nötigen Formeln findet man in der Tabellensammlung von Jahnke und Emde[1]). Wir finden also

$$V_l = C_l \cdot K_0\left(\frac{2\pi l r}{a}\right)\cos\frac{2\pi l x}{a}$$

und in unmittelbarer Nähe der Geraden

$$V_l \underset{\lim r=0}{=} -C_l \cdot \ln(r)\cdot\cos\frac{2\pi l x}{a};$$

Dies Einzelpotential kann also nur bestehen, wenn auf der Geraden eine Ladungsdichte ϱ_l

$$\varrho_l = \frac{C_l}{2}\cdot\cos\frac{2\pi l x}{a}$$

sich befindet.

Die im Problem gegebene Ladungsdichte stellen wir in Fourierscher Reihe dar:

$$\varrho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \cos\frac{2\pi n x}{a}.$$

Sie soll so sein, daß nur in den Punkten $x = na$ die Ladung E liege. Dies führt nach bekannter Methode auf die Form:

---

1) Ewald, Dissertation. München 1912.

2) Born, Dynamik der Kristallgitter. 1915.

1) Jahnke u. Emde, Funktionentafeln. Leipzig 1909, S. 135. (Dort ist $K_0(x)$ bezeichnet mit $\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix)$.)

$$\varrho(x) = \frac{E}{a} + \frac{2E}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n x}{a}.$$

Die Konstanten C_l sind also anzusetzen:

$$C_l = \frac{4E}{a}; \quad C_0 = \frac{2E}{a},$$

so daß die Form

$$V = \frac{4E}{a}\sum_{l=1}^{\infty} K_0\left(\frac{2\pi l r}{a}\right)\cdot\cos\frac{2\pi l x}{a} + \frac{2E}{a}\ln\left(\frac{2a}{r}\right) + K_1 \tag{1}$$

die Lösung der gestellten Aufgabe darstellt.

K_1 ist eine Konstante, die ∞ wird, wenn das Potential im Unendlichen verschwinden soll.

(Anmerkung: Daß die Fouriersche Reihe für $\varrho(x)$ divergent ist, stellt nur einen Schönheitsfehler dar, da die gefundene Reihe für V konvergiert. Man kann aber leicht auch eine konvergente Reihe für $\varrho(x)$ erhalten, wenn man fordert, daß bei jedem Punkt $x = na$ die Ladungsdichte

$$\varrho(x) = E\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\beta^2(na)^2} \text{ sei.}$$

Dies ergibt eine Entwicklung:

$$\varrho(x) = \frac{E}{a} + \frac{2E}{a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\beta^2 a^2}}\cdot\cos\frac{2\pi n x}{a}.$$

Läßt man β beliebig wachsen, so entspricht diese Ladungsverteilung einer von punktförmigen Ladungen beliebig gut, und die Reihe für $\varrho(x)$ kommt der obigen beliebig nahe, ohne ihre Konvergenz zu verlieren.)

Weiter findet man die Kräfte

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \text{ und } R = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

wenn man beachtet, daß

$$\frac{d}{dx}K_0(x) = K_1(x) \text{ ist.}$$

$$X = +\frac{8\pi E}{a^2}\sum_{l=1}^{\infty} l\cdot K_0\left(\frac{2\pi l r}{a}\right)\sin\frac{2\pi l x}{a}. \tag{1a}$$

$$R = -\frac{8\pi E}{a^2}\sum_{l=1}^{\infty} l K_1\left(\frac{2\pi l r}{a}\right)\cos\frac{2\pi l x}{a} + \frac{2E}{ar}. \tag{1b}$$

Die Reihenentwicklungen sind vorzüglich konvergent. Für $r > 0{,}8\,a$ genügt allein das erste Glied, um in (1) eine Genauigkeit von $^1/_{1000}$ zu erreichen.

Um das Feld in der Achse der Punktreihe oder in deren Nähe zu berechnen, sind die obigen Formeln ungeeignet. Hier führt eine andre Form zum Ziel.

Es ist in der Achse selbst

$$V(x) = \Big|_{\lim N=\infty} E\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \cdots \frac{1}{x+aN} + \frac{1}{a-x} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(a-x)+a} + \cdots + \frac{1}{(a-x)+aN}\right) =$$
$$= \frac{E}{a}\sum_{l=0}^{N}\left(\frac{1}{\frac{x}{a}+l} + \frac{1}{\left(1-\frac{x}{a}\right)+l}\right).$$

Man benutzt die Funktion[1])

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x);$$

dann wird

$$V(x) = -\frac{E}{a}\left(\Psi\left(\frac{x}{a}\right) + \Psi\left(1-\frac{x}{a}\right)\right) - \Big|_{\lim N=\infty} 2\ln N,$$

und

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = +\frac{E}{a^2}\left(\Psi'\left(\frac{x}{a}\right) - \Psi'\left(1-\frac{x}{a}\right)\right).$$

Die Funktion Ψ wird nur im Intervall zwischen 0 und 1 gebraucht. Tabuliert ist sie aber meist zwischen 1 und 2. Man benutzt die Beziehung

$$\Psi(x) = -\frac{1}{x} + \Psi(x+1);$$

$$\Psi'(x) = +\frac{1}{x^2} + \Psi'(x+1)$$

usw. und findet:

$$V(x) = -\frac{E}{a}\left(\Psi\left(\frac{x}{a}+1\right) + \Psi\left(2-\frac{x}{a}\right) - \right. \tag{2}$$
$$\left. - \frac{a}{x} - \frac{a}{a-x}\right) + K_1',$$

wo

$$K_1' = \frac{2E}{a}\Big|_{\lim N=\infty} \ln N,$$

$$X(x) = +\frac{E}{a^2}\left(\Psi'\left(\frac{x}{a}=1\right) - \Psi'\left(2-\frac{x}{a}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{a^2}{x^2} - \frac{a^2}{(a-x)^2}\right). \tag{2a}$$

In der Nähe der Punktreihe wird:

$$V = \frac{E}{a}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}+l\right)^2}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(1-\frac{x}{a}+l\right)^2}}\right.$$

[1]) Jahnke und Emde S. 27.

$$= -\frac{E}{a}\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\left(\frac{x}{a}+l\right)} + \sum_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x}{a}+l\right)} - \right.$$

$$- \frac{r^2}{2a^2}\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\left(\frac{x}{a}+l\right)^3} + \frac{1}{\left(1-\frac{x}{a}+l\right)^3}\right) +$$

$$\left. + \frac{3}{8}\frac{r^4}{a^4}\sum(5)\right) + \cdots.$$

$$= -\frac{E}{a}\left(\psi\left(\frac{x}{a}\right) + \psi\left(1-\frac{x}{a}\right) - \right.$$

$$- \frac{r^2}{4a^2}\left(\psi''\left(\frac{x}{a}\right) + \psi''\left(1-\frac{x}{a}\right) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{r^4}{64a^4}(\psi^{IV}) + \ldots + K_1'.\right.\right.$$

Oder auch:

$$V = E\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+r^2}}\right) -$$

$$- \frac{1}{a}\left(\psi\left(\frac{x}{a}+1\right) + \psi\left(2-\frac{x}{a}\right) - \frac{r^2}{4a^2}\cdot\right.$$

$$\left.\left(\psi''\left(\frac{x}{a}+1\right) + \psi''\left(2-\frac{x}{a}\right)\right) + \cdots + K_1'. \quad (3)$$

$$X = E\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}^3} - \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+r^2}^3}\right) +$$

$$+ \frac{1}{a^2}\left(\psi'\left(\frac{x}{a}+1\right) - \psi'\left(2-\frac{x}{a}\right) - \frac{r^2}{4a^2}\left(\psi'''\ldots\right)\right. . \quad (3a)$$

$$R = Er\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}^3} + \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+r^2}^3} - \right.$$

$$- \frac{1}{2a^2}\left(\psi''\left(\frac{x}{a}+1\right) + \psi''\left(2-\frac{x}{a}\right) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{r^2}{16a^4}(\psi^{IV}\ldots)\right)\right., \quad (3b)$$

d. h. man nimmt die nächsten Nachbarn heraus und berücksichtigt deren Potential und Kräfte gesondert. Dann ist die Entwicklung bis über die Grenzen $x = 0$ und $x = a$ brauchbar. Sie konvergiert für beliebiges r.

Man kann auch einen Punkt, z. B. $x = 0$, weglassen und das Potential in ihm und in seiner Umgebung berechnen. Es wird dann für $x = 0$

$$V = -\frac{2E}{a}(\psi(1) + \text{konst.}.$$

Der Wert des Potentials ist naturgemäß nur bis auf die Konstante K_1 bzw. K_1' zu ermitteln, die ∞ wird, wenn im Unendlichen $V = 0$ sein soll.

Diese Konstante fällt heraus, wenn das Potential zweier entgegengesetzt geladener Punktreihen gesucht wird und für beide Reihen Formel (1) oder (2) bzw. (3) benutzt werden kann. Muß nun für die eine Reihe Formel (1), für die andere (2) oder (3) benutzt werden, so muß die Differenz $K_1 - K_1'$ bekannt sein.

Dieselbe Konstante K_1 wie in (1) tritt auf, wenn ich das Potential einer homogen mit der Dichte $\frac{E}{a}$ geladenen Geraden betrachte, die von $x = Na$ bis $x = -Na$ sich erstreckt

$$V = \frac{2E}{a}\int_0^{Na} \frac{dx}{\sqrt{r^2+x^2}} =$$

$$= \frac{2E}{a}\ln\left(\frac{Na+\sqrt{r^2+(Na)^2}}{r}\right)$$

und N unendlich wachsen lasse.

$$V = \frac{2E}{a}\Big|_{\lim N=\infty} \ln\frac{2Na}{r} = \frac{2E}{a}\cdot\ln\frac{2a}{r} +$$

$$+ \frac{2E}{a}\Big|_{\lim N=\infty} \ln N = \frac{2E}{a}\ln 2a + K_1.$$

Durch Vergleich bemerkt man, daß für K_1' genau die gleiche Form gefunden wurde. Also ist $K_1 = K_1'$.

Man ersieht hieraus, weshalb in Formel (1) $\ln\frac{2a}{r}$ statt $\ln\frac{a}{r}$ geschrieben wurde.

2. Das Feld eines ebenen Liniengitters.

Das Gitter bestehe aus geraden parallelen Linien, die in Abständen a in einer Ebene liegen und die Ladungsdichte λ tragen. Die Koordinaten seien: x in der Ebene, senkrecht zu den Linien, z senkrecht zur Ebene.

Ich setze das Potential an in der Form:

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(z)\cdot\cos\frac{2\pi l x}{a} = \sum V_l.$$

$$\Delta V_l = 0 = \frac{\partial^2 V_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_l}{\partial z^2}$$

ergibt:

$$\frac{d^2 f_l(z)}{dz^2} - \frac{4\pi^2 l^2}{a^2} f_l(z) = 0,$$

$$f_l(z) = C_l\cdot e^{-\frac{2\pi l}{a}\cdot z}.$$

Dies fordert eine Ladung ϱ_l in der Ebene:

$$\varrho_l = -\frac{C_l\cdot l}{a}\cdot\cos\frac{2\pi l x}{a}.$$

Die Konstanten C_l ergeben sich (wie oben)

$$C_l = \frac{2\lambda}{l}; \quad C_0 = \frac{\lambda}{l},$$

so daß man findet:

$$V = +2\lambda \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} e^{-\frac{2\pi l x}{a}} \cos\frac{2\pi l x}{a} - \frac{2\pi\lambda}{a} z + e/K_2, \tag{4}$$

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = +\frac{4\pi\lambda}{a} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi l x}{a}} \sin\frac{2\pi l x}{a}, \tag{4a}$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = +\frac{4\pi\lambda}{a} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi l z}{a}} \cos\frac{2\pi l x}{a} + \frac{2\pi\lambda}{a}. \tag{4b}$$

Zur Berechnung in der Ebene sind die Formeln nicht verwendbar. Sie lassen sich aber leicht umformen, wenn man die cos und sin komplex darstellt. Dann führen sie auf bekannte Reihen. Es wird

$$V = -\ln\left(1 - 2e^{-\frac{2\pi y}{a}} \cos\frac{2\pi x}{a} + e^{-\frac{4\pi y}{a}}\right) - \frac{2\pi\lambda z}{a} + K_2 \tag{5}$$

$$X = +\frac{4\pi\lambda}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi z}{a}} \cdot \sin\frac{2\pi x}{a}}{\left(1 - 2e^{-\frac{2\pi z}{a}} \cos\frac{2\pi x}{a} + e^{-\frac{4\pi z}{a}}\right)} \tag{5a}$$

$$Z = +\frac{4\pi\lambda}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi z}{a}}\left(\cos\frac{2\pi x}{a} - e^{-\frac{2\pi z}{a}}\right)}{\left(1 - 2e^{-\frac{2\pi z}{a}} \cdot \cos\frac{2\pi x}{a} + e^{-\frac{4\pi z}{a}}\right)} + \frac{2\pi\lambda}{a}. \tag{5b}$$

Für $z = 0$ wird:

$$V = -\lambda \ln\left(4 \cdot \sin^2\frac{\pi x}{a}\right) + K_2 \tag{6}$$

$$X = +\frac{2\pi\lambda}{a} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\pi x}{a} \tag{6a}$$

$$Z = 0. \tag{6b}$$

3. Das Feld eines ebenen rechtwinkligen Punktgitters.

Die Punkte liegen in den Schnittpunkten zweier sich rechtwinklig schneidender äquidistanter ebener Parallelliniensysteme mit den Abständen a, bzw. b. Sie tragen die Ladungen E.

Die Koordinaten sind
x in der Ebene senkr. zu den Linien des Abstands a,
y „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ b,
z senkrecht zur Ebene.

Das Potential setze ich an in der Form:

$$V = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f_{lm}(z) \cos\frac{2\pi l x}{a} \cdot \cos\frac{2\pi m y}{b} = \Sigma\Sigma V_{lm},$$

$\Delta V_{lm} = 0$ ergibt:

$$\frac{a^2 f_{lm}(z)}{dz^2} - 4\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) f_{lm}(z) = 0.$$

Ich bezeichne

$$\sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} = k_{lm}$$

und finde

$$f_{lm}(z) = C_{lm} \cdot e^{-2\pi k_{lm} \cdot z};$$

$$V_{lm} = C_{lm}\, e^{-2\pi k_{lm} \cdot z} \cdot \cos\frac{2\pi l x}{a} \cdot \cos\frac{2\pi m y}{b}.$$

Dies Potential fordert eine Ladungsdichte in der Ebene:

$$\varrho_{lm}(x,y) = +C_{lm} \cdot k_{lm} \cos\frac{2\pi l x}{a} \cos\frac{2\pi m y}{b}.$$

Stelle ich die im Problem gegebene Ladungsverteilung durch 2 parametrige Fouriersche Reihen dar, so ergibt sich:

$$C_{lm} = \frac{4E}{ab \cdot k_{lm}}; \quad C_{0m} = \frac{2E}{ab \cdot k_{0m}};$$

$$C_{l0} = \frac{2E}{ab k_{l0}}; \quad C_{00} = \frac{E}{ab},$$

und ich finde

$$V = \frac{4E}{ab}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi k_{lm} \cdot z}}{k_{lm}} \cdot \cos\frac{2\pi l x}{a} \cdot \cos\frac{2\pi m y}{b} + \frac{2E}{b}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi l z}{a}}}{l} \cdot \cos\frac{2\pi l x}{a} + \frac{2E}{a}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi m z}{b}}}{m} \cdot \cos\frac{2\pi m y}{b} - \frac{E}{ab} \cdot 2\pi z + K_2. \tag{7}$$

Es ist evident, daß die Konstante K_2 in (4b (5), (6) und (7) identisch ist.

Hieraus folgt:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = +\frac{8\pi E}{a^2 b}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{l \cdot e^{-k_{lm} \cdot z}}{k_{lm}} \sin\frac{2\pi l x}{a} \cos\frac{2\pi m y}{b} + \tag{7a}$$

$$+\frac{4\pi E}{a^2 b}\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi l}{a} z} \cdot \sin\frac{2\pi l x}{a}$$

$Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ entsprechend X

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = +\frac{8\pi E}{ab}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-k_{lm}\cdot z}\cdot\cos\frac{2\pi l x}{a}\cos\frac{2\pi m y}{b} + \\ + \frac{4\pi E}{ab}\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi l}{a}z}\cos\frac{2\pi l x}{a} + \\ + \frac{4\pi E}{ab}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi m z}{b}}\cos\frac{2\pi m y}{b} + \\ + \frac{2\pi E}{ab}. \qquad (7\,b)$$

Die scheinbare Kompliziertheit dieser Formeln ist dadurch verursacht, daß die Glieder, für welche l bzw. $m = 0$ werden, den Zahlenfaktor 2 statt 4 haben. Die Reihen konvergieren sehr schnell für nicht zu kleines z.

Die einfachen Summen lassen sich wieder in geschlossener Form schreiben; doch ist diese Umformung ohne Wert, da sie nur für verschwindendes z von Vorteil ist und die Doppelsumme sich nicht so behandeln läßt. Für die Berechnung bei kleinem oder verschwindendem z, d. h. in der Ebene oder deren Nähe, empfiehlt sich die Summation der Felder der einzelnen Punktreihen, die hier auch mit wenigen Gliedern zum Ziel führt, soweit nicht der nicht periodische Anteil in Formel (1) in Frage kommt. Diesen behandelt man wie die Wirkung eines Liniengitters (5) und findet somit für kleine z geeignet:

$$V = \frac{4E}{a}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} K_0\left(\frac{2\pi l}{a}\sqrt{(y+mb)^2+z^2}\right)\cdot\cos\frac{2\pi l x}{a} \\ + \frac{4E}{a}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} K_0\left(\frac{2\pi l}{a}\sqrt{(-y+mb)^2+z^2}\right)\cos\frac{2\pi l x}{a} \\ - \frac{E}{a}\ln\left(1 - 2e^{-\frac{2\pi z}{b}}\cos\frac{2\pi y}{b} + e^{-\frac{4\pi z}{b}}\right) \\ - \frac{2\pi E z}{ab} + K_2. \qquad (8)$$

Ist sowohl y wie z sehr klein, so sondert man aus der ersten Doppelsumme das Glied mit $m = 0$ aus und behandelt die Wirkung der Punktreihe $m = 0$ auf einen ihr benachbarten Punkt nach Formel (3).

4. Das Feld des ebenen schiefwinkligen Punktgitters.

Die Punkte liegen auf den Schnittpunkten zweier Parallelliniensysteme, welche miteinander Parallelogramme, mit den Seiten a und b und dem Winkel φ bilden. Sie tragen die Ladung E.

Die Koordinaten sind:
x in der Richtung der Seiten a,
y senkrecht dazu in der Ebene,
z senkrecht zur Ebene.

Ein Ansatz wie für das rechtwinklige Gitter führt hier nicht zum Ziel. Man ersetzt hier das Produkt der beiden cos durch eine Summe von zwei cos. Ich setze an:

$$V = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{f_{lm}(z)\cos 2\pi\left(\frac{lx}{a} - \frac{y}{\sin\varphi}\left(\frac{l}{a}\cos\varphi - \frac{m}{b}\right)\right)\right. \\ \left. + g_{lm}(z)\cos 2\pi\left(\frac{lx}{a} - \frac{y}{\sin\varphi}\left(\frac{l}{a}\cos\varphi + \frac{m}{b}\right)\right)\right\}.$$

$\Delta V_{lm} = 0$ wird befriedigt, wenn

$$\frac{d^2 f_{lm}(z)}{dz^2} - f_{lm}(z)\cdot 4\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{l}{a}\cos\varphi - \frac{m}{b}\right)^2\right)$$

und

$$\frac{d^2 g_{lm}(z)}{dz^2} - g_{lm}(z)\,4\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{l}{a}\cos\varphi + \frac{m}{b}\right)^2\right)$$

gilt, d. h. wenn

$$f_{lm}(z) = C_{lm}^{(-)} e^{-2\pi k_{lm}^{(-)}\cdot z}$$

und

$$g_{lm}(z) = C_{lm}^{(+)} e^{-2\pi k_{lm}^{(+)}\cdot z},$$

wo

$$k_{lm}^{(-)} = \frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{l^2}{b^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{2lm}{ab}\cos\varphi}$$

und

$$k_{lm}^{(+)} = \frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{2lm}{ab}\cos\varphi}$$

bedeutet.

Das V_{lm} fordert eine Ladungsdichte in der Ebene:

$$\varrho_{lm} = +C_{lm}^{(-)} k_{lm}^{(-)}\cos 2\pi\left(\frac{lx}{a} - \frac{y}{\sin\varphi}\left(\frac{l}{a}\cos - \frac{m}{b}\right)\right) \\ - C_{lm}^{(+)} \ldots .$$

Die im Problem gegebene Ladungsverteilung stellt sich dar in der Form:

$$\varrho(x,y) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{lm}\cos\frac{2\pi l}{a}(x - y\,\mathrm{tg}\,\varphi)\cos\frac{2\pi m}{b}\cdot\frac{y}{\sin\varphi},$$

wo

$$b_{lm} = \frac{4E}{ab\cos\varphi};\quad b_{l0} = \frac{2E}{ab\cos\varphi} = b_{0m};$$

$$b_{00} = \frac{E}{ab\cos\varphi}.$$

1) Die Zeichen (−) und (+) sind Indizes, die auf die betreffenden Zeichen in den zugehörigen Ausdrücken hinweisen sollen.

Es muß also sein

$$C_{lm}^{(-)} \cdot k_{lm}^{(-)} = C_{lm}^{(+)} k_{lm}^{(+)} = \frac{2E}{ab\cos\varphi},$$

so daß wir finden:

$$V = +\frac{2E}{ab\cos\varphi}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{e^{-2\pi k_{lm}^{(-)} \cdot z}}{k_{lm}^{(-)}}\cos 2\pi\left(\frac{lx}{a} - \frac{y}{\sin\varphi}\left(\frac{l}{a}\cos\varphi - \frac{m}{b}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{e^{-2\pi k_{lm}^{(-)} \cdot z}}{k_{lm}^{(+)}}\cos 2\pi(\ldots(+))\right\}\right.$$

$$+ \frac{2E}{b}\operatorname{tg}\varphi \cdot \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi l}{a\cdot\sin\varphi}\cdot z}\cdot\cos 2\pi\cdot\frac{l(x - y\operatorname{ctg}\varphi)}{a}$$

$$+ \frac{2E}{a}\operatorname{tg}\varphi\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi m}{b\cdot\sin\varphi}\cdot z}\cos 2\pi\frac{my}{b\cdot\sin\varphi}$$

$$- \frac{2\pi E}{ab\cos\varphi}\cdot z + K_2. \quad (9)$$

Auch diese Formel konvergiert schnell wegen der e-Funktionen. Es ist aber fraglich, ob es rationeller ist, sie zu benutzen oder das Feld aus der Summation der das Gitter bildenden Punktreihen zu berechnen. Jedenfalls ist bei der starken Konvergenz der Formel (1) letzterer Weg nicht wesentlich umständlicher, zumal wenn nur das Potential gesucht wird.

5. Das Feld eines räumlichen rechtwinkligen Punktgitters.

Die Punkte liegen in den Schnittpunkten dreier äquidistanter, sich rechtwinklig schneidender Parallelebenensysteme, welche Parallelogramme mit den Kanten a, b und c bilden.

Die Koordinaten seien:

x parallel zu a,
y „ „ b,
z „ „ c.

Das Potential ergibt sich durch Summation aus dem des ebenen Punktgitters.

$$V = \frac{4E}{ab}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-k_{lm}(z+nc)}}{k_{lm}}\cdot\cos\ldots\cos\ldots\right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty}\sum\sum\frac{e^{-k_{lm}(c-z+nc)}}{k_{lm}}\cdot\cos\cdot\cos + \ldots + \ldots\right.$$

Die Summation über n ist eine geometrische Reihe. Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nc} = \frac{1}{1 - e^{-c}},$$

so daß wir finden:

$$V = \frac{4E}{ab}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-k_{lm}z}}{k_{lm}}\cdot\frac{1}{1 - e^{-k_{lm}c}}\right.$$

$$\left. + \frac{e^{-k_{lm}(c-z)}}{k_{lm}}\cdot\frac{1}{1 - e^{-k_{lm}c}}\right)\cos\cdot\cos\ldots + \ldots + \ldots$$

$$= \frac{4E}{ab}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k_{lm}}\cdot\frac{\mathfrak{Cof}\left(k_{lm}\left(z - \frac{c}{2}\right)\right)}{\mathfrak{Sin}\left(\frac{k_{lm}c}{2}\right)}$$

$$\cos\frac{2\pi l(x)}{a}\cos\frac{2\pi my}{b} + \ldots + \ldots + K_2. \quad (10)$$

Obgleich die Möglichkeit, durch diese unsymmetrische Behandlung der z-Koordinate die 3fache Summation zu umgehen, einen theoretischen Vorteil bedeutet, halte ich praktisch diese Formel (10) für unwichtig. Der periodische Anteil der Potentiale der ebenen Gitter wird nämlich mit wachsendem z so schnell verschwindend klein, daß die direkte Summation etwa ebenso schnell durchzuführen ist wie die Rechnung nach obiger Formel. Man übersieht dann auch leichter die Genauigkeit des Resultats.

Aus demselben Grunde habe ich darauf verzichtet, analoge Formeln für das schiefwinklige räumliche Gitter zu geben.

Es ist auch hier wieder für einen Punkt in der Nähe einer Gitterfläche der systematische Aufbau des Feldes wie oben anzuwenden.

6. Das Feld einer gemischten Punktreihe.

Zwischen den Punkten im Abstand a liegen entgegengesetzt geladene an den Stellen

$$x = \left(\frac{1}{2} + l\right)a.$$

Es wird

$$V = V(r, x) - V\left(r, x + \frac{a}{2}\right)$$

also nach Formel (1),

$$V = \frac{4E}{a}\sum_{l=1}^{\infty} K_0\left(\frac{2\pi lr}{a}\right)\left(\cos\frac{2\pi lx}{a} - \cos\frac{2\pi l\left(x + \frac{a}{2}\right)}{a}\right.$$

oder

$$V = \frac{8E}{a}\sum_{l=1}^{\infty} K_0\left(\frac{2\pi(2l-1)r}{a}\right)\cos\frac{2\pi(2l-1)x}{a},$$

d. h. es bleiben nur die ungeraden Glieder bestehen. Das nichtperiodische Glied verschwindet und ebenso die unbestimmte Konstante K_1. Die Konvergenz ist noch wesentlich besser als bei der einfachen Reihe.

Einfacher schreibt sich die Formel:

$$V = \frac{8E}{a} \sum_{l=1}^{\infty} (\text{ungerade})\, K_0\left(\frac{2\pi l r}{a}\right) \cos\frac{2\pi l x}{a} \quad (10)$$

In der Reihe selbst wird aus Formel (2):

$$V = -\frac{E}{a}\left(\psi\left(\frac{x}{a}+1\right) + \psi\left(2-\frac{x}{a}\right) - \psi\left(\frac{x}{a}+\frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{a}\right) + \frac{E}{a}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}\right)\right) \quad (11)$$

und in der Nähe der Reihe entsprechend der Formel (3).

Das Potential in einem (fortgelassenen) Gitterpunkt wird

$$\overset{0}{V} = -\frac{2E}{a}\left(\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{4E}{a} \ln 2. \quad (12)$$

Für die nächste Umgebung verwendet man Formel (11) unter Fortlassung des Gliedes $\frac{E}{x}$, bzw. die Erweiterung der Formel (3) unter Fortlassung des Gliedes $\frac{E}{\sqrt{x^2+r^2}}$.

7. Das Feld eines gemischten ebenen Liniengitters.

Die Linien liegen im Abstand $\frac{a}{2}$ und tragen abwechselnd positive und negative Ladung.

Es wird hier entsprechend (10):

$$V = 4\lambda \sum_{l=1}^{\infty} (\text{ungerade})\, \frac{1}{l} \cdot e^{-\frac{2\pi l y}{a}} \cdot \cos\frac{2\pi l x}{a} \quad (13)$$

oder auch geeignet für kleines oder verschwindendes z

$$V = -\lambda \ln\left(\frac{1 - 2e^{-\frac{2\pi z}{a}} \cdot \cos\frac{2\pi x}{a} + e^{-\frac{4\pi z}{a}}}{1 + 2e^{-\frac{2\pi z}{a}} \cdot \cos\frac{2\pi x}{a} + e^{-\frac{4\pi z}{a}}}\right) = -\lambda \ln\left(1 - \frac{4e^{-2\pi z} \cdot \cos\frac{2\pi x}{a}}{1 + 2e^{-\frac{2\pi z}{a}} \cdot \cos\frac{2\pi x}{a} + e^{-\frac{4\pi z}{a}}}\right).$$

(Fortsetzung siehe nächste Seite.)

Rechenschema und Beispiel.

Zum Schluß gebe ich noch ein Rechenschema und als Beispiel die Berechnung des Potentials eines kubischen flächenzentrierten Gitters auf einen Gitterpunkt.

$a = b = c;\ x = y = z = 0.$

Formel	Gegenstand	x	$y(r)$	z	l	m	$V : \frac{E}{a}$		
(12)	Reihe durch den Punkt	0	0	0	—	—	$+4 \ln 2$	+ 2,767	+ 2,767
(10)	1. Nachbarreihe (rechts)	0	$\frac{a}{2}$	—	1	—	$+8 K_0(\pi)$	+ 0,236	
	" "	"	"	—	3	—	$+8 K_0(3\pi)$	+ 0,000 (3)	+ 0,228 (6)
	2. " "	"	a	—	1	—	$-8 K_0(2\pi)$	− 0,008	
	3. " "	"	$\frac{3}{2}a$	—	1	—	$+8 K_0(3\pi)$	+ 0,000 (3)	
	Dasselbe links								+ 0,228 (6)
(15)	1. Nachbarebene (oben)	0	0	$\frac{a}{2}$	1	1	$\frac{16}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\pi\sqrt{2}}$	+ 0,133	
	" "	"	"	"	1	3	$\frac{16}{\sqrt{10}} \cdot e^{-\pi\sqrt{10}}$	0,000 (2)	0,131 (7)
	" "	"	"	"	3	1	"	0,000 (2)	
	2. " "	"	"	a	1	1	$\frac{16}{\sqrt{2}} \cdot e^{-2\pi\sqrt{2}}$	− 0,001 (7)	
	Dasselbe unten								0,131 (7)
									$V = \frac{E}{a} \cdot 3{,}487$ (6)

Man erkennt aus diesem Beispiel, wie schnell die Reihen konvergieren und wie einfach sich die Rechnung gestalten kann.

Für $z = 0$ wird

$$V = -\lambda \ln\left(4 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{a}\right).$$

8. Das Feld eines gemischten (flächenzentrierten) rechtwinkligen ebenen Punktgitters.

$$V = \frac{16E}{ab} \sum_{l=1}^{\infty} (\text{ungerade}) \sum_{m=1}^{\infty} (\text{ungerade}) \frac{e^{-2\pi z k_{lm}}}{k_{lm}} \cdot \cos\frac{2\pi l x}{a} \cdot \cos\frac{2\pi m y}{b}. \quad (15)$$

9. Das Feld eines kubischen flächenzentrierten Raumgitters.

$$V = \frac{16E}{ab} \sum_{l=1}^{\infty} (\text{unger.}) \sum_{m=1}^{\infty} (\text{unger.}) \frac{\mathfrak{Cof}\left(2\pi\left(z - \frac{c}{4}\right)k_{lm}\right)}{k_{lm} \cdot \mathfrak{Cof}\left(\frac{\pi c}{2} \cdot k_{lm}\right)} \cdot \cos\frac{2\pi l x}{a} \cdot \cos\frac{2\pi m y}{b}. \quad (16)$$

(Eingegangen 5. September 1918.)

Über die Berechnung des Ortes der chemischen Elemente im periodischen System aus dem Atomgewicht und der Dichte.

Von Karl Fehrle.

Durch die Gleichung

$$\sqrt[3]{\frac{A^4 \cdot 0{,}076}{s \cdot 1{,}008^4}} = \left(\frac{\Theta \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} + 1}{2\pi \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} + 1}\right)^3, \quad (1)$$

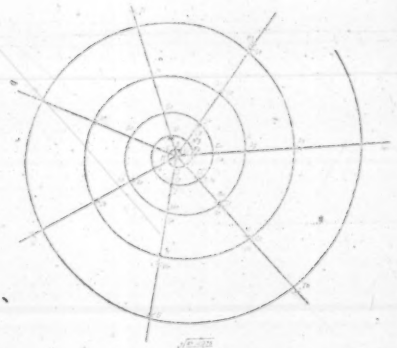
wo A das Atomgewicht und s das spezifische Gewicht eines Elements im festen Zustande, womöglich in der Nähe des absoluten o-Punktes, bedeutet, wird jedem Wert von

$$\sqrt[3]{\frac{A^4 \cdot 0{,}076}{s \cdot 1{,}008^4}} = r \quad (2)$$

ein Wert von Θ zugeordnet, welche zusammen, wenn r und Θ als Polarkoordinaten aufgefaßt werden, Punkte auf der Spirale

$$r = \left(\frac{\Theta \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} + 1}{2\pi \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} + 1}\right)^3$$

festlegen. Der Ausdruck der linken Seite von (1) ist, im Bilde der Molekel in meiner früheren Abhandlung[1]), der Bewegungsgröße der Atome bei gleicher Winkelgeschwindigkeit proportional. Führt man diese Bestimmung für alle Elemente durch, so findet man im allgemeinen, daß die Punkte auf Radienvektoren liegen, die um o oder ganzzahlige Vielfache von $\frac{2\pi}{7}$ gegeneinander gedreht sind, sowie daß die auf demselben Radiusvektor liegenden Werte im allgemeinen Elementen zugehören, die eine der Vertikalreihen im periodischen System bilden. Die den einzelnen Elementen derselben Vertikalreihe



zugehörenden Werte von Θ unterscheiden sich also um ganzzahlige Vielfache von 2π. Sie werden daher aus der Reihe, die man erhält, wenn man den Ausdruck der rechten Seite von (1) der Reihe nach für alle

$$\Theta = n \cdot \frac{2\pi}{7} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

bildet, durch Sprünge um je 7 ausgesondert. Beginnt man die Sprünge z. B. mit dem 7. Gliede, so erhält man die Wasserstoffreihe. Nahezu dieselben Werte ergeben sich, wenn man

$$\sum_{n=1}^{n=a} (2n - 1)^2, \quad (3)$$

wo a der Reihe nach gleich $1, 2, 3, \ldots$ zu setzen ist, bildet und jedes Glied durch

1) Diese Zeitschr. 19, 281, 1918.

$$4\sum_{1}^{7} n^2 \qquad (4)$$

dividiert. Durch Sprünge um je 7, gleichviel wo man beginnt, wird aus Reihe (3) ($a = 1, 2, 3 \ldots$) eine neue arithmetische Reihe 3. Ordnung ausgesondert, deren konstante Differenz 2744 ist. Diese, durch (4) dividiert, gibt 4,9, also nahezu den Ausdruck der linken Seite von (1), gebildet für Helium. Daraus ergibt sich für die Wasserstoffreihe des periodischen Systems, wenn statt der Ausdrücke der linken Seite von (1) gleich die Atomzeichen gesetzt werden, folgendes Schema:

Reihe:	H	$2H + He$	$3H + 4He$	$4H + 10He$	$5H + 20He$
1. Diff. „	$H + He$	$H + 3He$	$H + 6He$	$H + 10He$	
2. „ „		$2He$	$3He$	$4He$	$5He$
3. „ „		He	He	He	

Die oberste Reihe gibt, wenn für H und He die Ausdrücke der linken Seite von (1) eingesetzt werden, der Reihe nach diese Ausdrücke für H, Li, Na, K und Cu, Ag, Au, also die 1. Gruppe des periodischen Systems, mit Ausnahme von Rb und Cs. Die Figur gibt über den erreichten Grad der Übereinstimmung Auskunft. Unter den Zeichen Fe, Ru und Os sind jeweils die Mittelwerte der Ausdrücke (1) für die betreffenden Triaden zu verstehen. Bemerkenswert ist, daß bei meiner Darstellungsweise die Gruppe der Triaden bildenden Elemente mit der siebenten Gruppe zusammenfällt.

Freiburg i. B., August 1918.

(Eingegangen 18. August 1918.)

BESPRECHUNGEN.

H. Börner, Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der Realgymnasien und Oberrealschulen sowie zur Einführung in das Studium der neueren Physik. 7. Aufl. Bearbeitet unter Mitwirkung von G. Mohrmann. gr. 8. XV u. 504 S. mit 382 Abbildungen. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung. 1917. Geb. M. 6.40.

G. Mohrmann, Physikalische Aufgabensammlung im Anschluß an die 7. Aufl. von H. Börners Lehrbuch der Physik. gr. 8. 32 S. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung. 1917. Geh. M. —.80.

Für die neue Auflage des Börnerschen Lehrbuches, dessen vorige in Bd. 13, 1227, 1912 dieser Zeitschrift besprochen ist, hat der um den physikalischen Unterricht sehr verdiente Verf. noch vor seinem Tode mit seinem Mitarbeiter die wichtigsten Änderungen vorbereiten können. Sie betreffen Zusätze in allen Abschnitten, die durch die Fortschritte der Methodik, der Wissenschaft und deren Anwendungen in der Technik, auch der Kriegstechnik, geboten waren und für die durch Kürzungen an anderen Stellen Raum geschaffen wurde, ferner eine weitgehende Änderung der Darstellung der Elektrizitätslehre durch die Elektronentheorie, die möglichst früh eingeführt wird, um dadurch dem Schüler ein einheitliches und anschauliches Bild der Wirkungen der Elektrizität und ihres Zusammenhanges mit den andern Gebieten der Physik zu geben. Dann ist noch eine zusammenhängende Darstellung der Himmels- und Erdkunde zugefügt. Alle diese Änderungen sind für den Unterricht wertvoll und erhöhen die Brauchbarkeit des bewährten Lehrbuches.

An einer Stelle sind allerdings die Verf. über die Grenzen, die der Schule gesteckt sind, hinausgegangen. Statt der experimentellen Ableitung der Gesetze der Induktionsströme, die eins der besten Beispiele bildet, um dem Schüler zu zeigen, wie physikalische Gesetze und wissenschaftliche Erkenntnis überhaupt gewonnen werden, wird hier nur gesagt, daß „offenbar" aus der Einwirkung eines Magnetfeldes auf die im Leiter sich bewegenden Elektronen die Induktionsströme, ihre Richtung und ihre EMK. sich ergeben. Dabei finden sich noch manche Unklarheiten, die den Schüler zu ganz falschen Schlüssen veranlassen könnten, z. B. der Vergleich mit der Einwirkung des Magnetfeldes auf die Molekularmagnete des Eisens und die Ableitung der Induktionsströme aus dem Widerstande, den das Kupfer dem Eindringen der Kraftlinien entgegensetzt, „da Kupfer ein diamagnetischer Körper ist". Dieser Abschnitt bedarf also einer gründlichen Umarbeitung. Dann würde im letzten Abschnitte, der Himmelskunde, auch viel mehr die Forderung der neueren Methodik berücksichtigt werden müssen, daß man hier immer von der wirklichen Beobachtung des Himmels ausgehen muß.

Die kleine Aufgabensammlung enthält, geordnet nach den Abschnitten des Lehrbuches, viele recht brauchbare Aufgaben, die besonders an die Schülerübungen anknüpfen, das so gewonnene Zahlenmaterial benutzen und deshalb sehr geeignet sind, diese Übungen zu vertiefen und zu beleben.

Götting.

Ernst Großmann, Untersuchungen über die astronomische Refraktion. (Aus: Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Mathem.-physik. Klasse. XXVIII. Bd., 9. Abhandlung.) 4. 72 S. München. 1917. M. 3.—.

In der vorliegenden Schrift gibt der Verf. eine zweite Bearbeitung einer Beobachtungsreihe von Stern-Deklinationen, die er in den Jahren 1896—98 an dem Merid. Kreis der v. Kuffnerschen Sternwarte in Ottakring b. Wien zum Zwecke der Bestimmung der Konstanten der astronomischen Strahlenbrechung angestellt hat. Es sind in den letzten Dezennien eine Anzahl solcher Beobachtungsreihen teils neu unternommen, z. T. sind ältere Reihen mit besonderer Rücksicht auf die Wirkung der Refraktion neu bearbeitet worden. Die Vergleichung der Sterndeklinationen, die aus diesen Reihen erhalten wurden, untereinander sowohl als auch mit den Orten der sog. Fundamental-Kataloge von Auwers, Newcomb und L. Boos hatten für die aus der Großmannschen Reihe abgeleiteten Deklinationen gewisse Abweichungen ergeben, die ihn veranlaßten eine Neuberechnung vorzunehmen. Diese ist auch in physikalischer Beziehung von Interesse, da der Verf. eine sehr eingehende Diskussion des Einflusses der Temperatur der das Instrument umgebenden Luft, ihrer Schichtung und ihres Wasserdampfgehaltes vornimmt mit Beziehung auf die optische und physikalische Dichte der Luft. Auf Grund der Zenitdistanzmessungen leitet er den Ausdehnungskoeffizienten der Luft zu 0,003673 ab, der mit dem physikalisch ermittelten bis auf 5 Einheiten der 6. Dezimale übereinstimmt, obgleich aus den verschiedenen anderen Reihen, die zum Vergleich herangezogen werden, z. T. stärker abweichende Werte resultieren. Auch die sog. Konstante der Refraktion wird einer sehr eingehenden Betrachtung unterworfen, und zwar mit Bezug auf ihren Wert in verschiedenen Zenitdistanzen, bei verschieden hellen und verschieden gefärbten Sternen (d. h. bei Sternen mit lang- und kurzwelligem Spektrum). Das Resultat ist, daß der Besselsche Wert, der auch in den neueren Refraktionstafeln v. Radau benutzt ist, von 60."445 auf 60."244 vermindert werden müßte. — Das Schlußresultat der Neubearbeitung, welches im übrigen vornehmlich astronomisches Interesse besitzt, gipfelt darin, daß sich Fehler in der früheren Bearbeitung nicht finden lassen, daß die gefundenen Abweichungen vielmehr nicht erheblicher sind, als sie sich bei scharfer Diskussion auch bei anderen Deklinations-Bestimmungen dieser Art vorfinden und daß in gewisser Hinsicht die Genauigkeit der sog. Fundamental-Kat. etwas überschätzt wird, was zum erheblichen Teil der für die Reduktion auf ein gemeinsames Äquinoktium benutzten Eigenbewegungen der Gestirne zugeschrieben werden dürfte, da diese noch nicht mit der genügenden Genauigkeit bekannt sind.

L. Ambronn.

F. Krauß, Die Grundgesetze der Wärmeleitung und ihre Anwendung auf plattenförmige Körper. gr. 8. VI u. 100 S. mit 37 Textfiguren. Berlin, Julius Springer. 1917. M. 2.80.

Die ursprünglich in der Zeitschrift der Dampfkesseluntersuchungs- und Versicherungsgesellschaft (1916) erschienene Schrift kann als Beispielsammlung zur Theorie der eindimensionalen Fourierschen Wärmeleitungsgleichung

$$a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

bezeichnet werden. Sie beschränkt sich demgemäß auf den Durchgang der Wärme durch ebene, unendlich ausgedehnte Platten unter den verschiedensten Grenzbedingungen, wobei auf den Wärmeübergang zwischen der Platte und dem umgebenden Medium besondere Aufmerksamkeit verwendet wird. Die Darstellung ist in allen Teilen klar und ausführlich und daher auch für den Leser verständlich, dem die Theorie der partiellen Differentialgleichungen noch fremd ist. Die durchgerechneten Beispiele sind sämtlich durch Zahlen und Figuren veranschaulicht und betreffen im einzelnen solche Fälle, die vorzugsweise der Feuerungstechnik angehören. Trotzdem ist die Schrift auch dem Physiker wegen der Sorgfalt, mit welcher der Verf. jede Unsauberkeit in der physikalischen Begründung seiner Schlüsse vermeidet, warm zu empfehlen.

R. Grammel.

Felix Auerbach, Ernst Abbe. Eine Lebensbeschreibung. gr. 8. XV u. 512 S. Mit einer Gravüre, 115 Textabbildungen und der Wiedergabe zweier Originalschriftstücke. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1918. Geh. M. 18.—, geb. M. 21.—.

Das als V. Band von Wilh. Ostwalds Sammelwerk: Große Männer, Studien zur Biologie des Genies erschienene Buch ist als eine umfassende Sammlung der Lebensdaten des berühmten Jenenser Gelehrten, Reformators der physikalischen Optik und zugleich auf sozialem Gebiet bedeutsamen Mannes umso verdienstlicher, als es gerade Abbe verstanden hat seine Persönlichkeit jederzeit zurücktreten zu lassen, so daß er nur verhältnismäßig Wenigen menschlich näher getreten ist, abgesehen da, wo er mit Rat und Tat zu helfen und zu fördern vermochte. — Diese fast übertriebene Bescheidenheit und ein steter Reichtum an neuen Ideen ist auch wohl der Grund gewesen, daß er nur selten dazu gekommen ist, außer seinen ersten Arbeiten Abschließendes zu veröffentlichen. Erst nach seinem Tode sind in zwei Bänden Sammlungen seiner überall zerstreut erschienenen Aufsätze und Vorträge herausgegeben worden, die ein anschauliches Bild der überaus vielseitigen Tätigkeit Abbes geben.

Das vorliegende Werk hat sich nun zur Aufgabe gestellt das Leben dieses eigenartigen Mannes einem weiteren Kreise vor Augen zu führen. Viele Daten, namentlich aus der Jugend Abbes, seiner Studienzeit und seiner Frankfurter Tätigkeit werden den meisten Lesern Neues erzählen. Die Jenenser Arbeiten und seine Beziehungen zur Zeißschen Werkstätte und schließlich die Gründung der „Carl-Zeiß-Stiftung" sind überall bekannt geworden. Bietet so das Auerbachsche Buch viel des Interessanten und für Wissenschaft und Technik auch für alle Zukunft Wichtigen, so muß sachlich doch bemerkt werden, daß der Verf. in mancher Hinsicht die einem Manne wie Abbe und seiner Familie gegenüber gebotene Zurückhaltung vermissen läßt; viele persönliche Dinge haben einen ihnen hier nicht gebührenden Platz gefunden. Aber auch sonst hätte man von einem biographisch tätigen Verf. größere Sorgfalt erwarten müssen. Die Darstellung der Abbeschen Theorie der mikroskopischen Abbildung soll auf S. 194 ff. mit Bezug auf eine Figur, die aus Dippel, „Das

Mikroskop", stammt erläutert werden. Text und Figur passen in keiner Weise zueinander! Die Angaben auf S. 184 über die Eintritts- und Austrittspapille und die daran geknüpften Erörterungen sind für jeden, der nicht genau Bescheid weiß, unverständlich. Das ist durch die wenig zweckmäßig herausgegriffenen Darstellungen noch an mancher anderen Stelle des Buches der Fall. Der Jenenser Geologe hat sich Schmid nicht Schmidt, der Philosoph Herbart nicht Herbardf, der Zoologe Gegenbaur nicht Gegenbauer geschrieben. Solche Dinge, von denen noch mehr vorkommen, sollten in einer wissenschaftlichen Biographie nicht zu finden sein, sie schädigen das Vertrauen zum übrigen Inhalt.

L. Ambronn.

Sir William Ramsay und Georg Rudorf, Die Edelgase. 8. VIII u. 416 S. Handbuch der allgemeinen Chemie, herausgegeben von Wilhelm Ostwald und Carl Drucker. Bd. II. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1918. Geh. M. 26.—, geb. M. 28.—

Das vorliegende Werk ist nach Art chemischer Lehrbücher geschrieben, da aber die darin behandelten Elemente keinerlei chemische, sondern nur physikalische Eigenschaften aufweisen, so enthält dieses Chemiebuch keine Chemie im eigentlichen Sinne, sondern „physikalische Chemie". Als Ziel haben sich die Verfasser gesteckt, alle in der Literatur vorhandenen Angaben über die Eigenschaften der Edelgase möglichst vollständig zusammen zu fassen, und sie haben dieses weit gesteckte Ziel, soweit es der Referent bei schneller Durchsicht und einigen genaueren Stichproben beurteilen kann, erreicht. Dabei sind sie kritisch zu Werke gegangen, so daß man nicht, wie in manchen andern chemischen Handbüchern, eine Aneinanderreihung einander widersprechender, sondern eine sehr zweckmäßige Zusammenstellung der zuverlässigsten Daten findet. Widersprüche werden nicht verschwiegen, sondern mit Hinweis auf die voraussichtlich begangenen Beobachtungsfehler angeführt. Daß trotz des ungeheuren Tatsachenmaterials — es ist aus etwa 2000 Abhandlungen entnommen, die am Schlusse der Kapitel angeführt sind — ein leicht lesbares Werk entstanden ist, muß den Verfassern besonders hoch angerechnet werden. Die geschickte und übersichtliche Gruppierung der Tatsachen, die klare und flüssige Darstellung tragen vor allem hierzu bei. — Das Buch zerfällt in zwei Teile, einen allgemeinen und einen speziellen. Im allgemeinen Teil werden alle diejenigen Eigenschaften besprochen, die allen Edelgasen gemeinsam sind, wodurch unnötige Wiederholungen vermieden werden. Es würde zu weit führen, wollten wir jedes einzelne Kapitel anführen. Nur die wichtigsten Kapitelüberschriften seien genannt, um eine Vorstellung vom Inhalte des Werkes zu geben: Geschichtliches; die chemische und physikalische Natur der Edelgase; ihre Valenz; ihre Stellung im periodischen System; ihr irdisches und außerirdisches Vorkommen; die Edelgase und die kinetische Gastheorie, die Zustandsgleichung und die Dampfdruckformel; die physikalischen Eigenschaften der Edelgase. Jedes Kapitel bildet ein wohldurchgearbeitetes, zusammenhängendes Ganze. Am Beispiel „die Edelgase und die kinetische Gastheorie" sei dies gezeigt. Es wird ausgegangen von den bekannten Formeln, für deren Ableitung auf die Abhandlungen von Clausius, Maxwell, van der Waals usw. verwiesen wird, und dargelegt, wie weit die Edelgase diesen Formeln gehorchen und, wo sich außerhalb der Versuchsfehlergrenzen liegende Abweichungen finden, wie diese zu erklären sind oder wo Erklärungsversuche bisher versagen. — Diesem allgemeinen folgt ein spezieller Teil, in dem jedes der Gase einzeln abgehandelt wird. Im ersten Kapitel wird die Frage besprochen, ob es ein Edelgas gibt, das leichter als Helium ist, dann kommen der Reihe nach Helium, Neon, Argon, Metargon, Krypton und Xenon. Die Schlußkapitel sind den radioaktiven Emanationen: dem Niton (Radiumemanation), der Thor- und Aktinium-Emanation gewidmet. Jeder einzelne dieser Abschnitte hat im wesentlichen die gleiche Unterteilung. Er beginnt mit einem geschichtlichen Kapitel, die Entdeckung des Elementes abhandelnd. Die folgenden Kapitel enthalten das Vorkommen, die Darstellung und die physikalischen Eigenschaften. Auch diese Abschnitte geben mehr als eine bloße Aneinanderreihung von Beobachtungsdaten. Es wird jeweils die Methode beschrieben, nach der die Zahlen gewonnen sind, die Abweichungen der nach verschiedenen Methoden erhaltenen Ergebnisse werden kritisch besprochen und schließlich wird diskutiert, wie weit die experimentell gewonnenen Zahlen mit den theoretisch zu erwartenden übereinstimmen. Bei der Besprechung der optischen Eigenschaften ist außer beim Helium auf Vollständigkeit insofern verzichtet, als nicht die Wellenlängen sämtlicher Linien der Spektren gegeben sind, da man diese leicht dem Kayserschen Handbuch oder den Watt schen Tabellen entnehmen kann. In die Behandlung der elektrischen Eigenschaften ist die Bohrsche Theorie schon eingeschlossen. Die neueren atom-theoretischen Arbeiten konnten freilich noch nicht aufgenommen werden, da das Manuskript des Buches — beide Herausgeber sind Engländer — vermutlich vor August 1914 nach Deutschland gekommen ist. Bis zu diesem Zeitpunkt aber sind wohl alle Untersuchungen, die mit einem der Edelgase irgendeine Beziehung haben, verwertet. Daher kann dieses Werk allen Physikern aufs wärmste empfohlen werden und sollte in keiner physikalischen Bibliothek fehlen.

Riesenfeld.

Berichtigung

zu meiner Veröffentlichung „Über den Einfluß ultraroter Eigenfrequenzen usw." (diese Zeitschr. 19, 485, 1918).

Von J. Wimmer.

Die Formel des § 3 (S. 485), betreffend das Verhältnis der Valenzzahl zur Zahl der positiven Ladungen, muß lauten:

$$\frac{v}{z} = \frac{G_1 + G_2}{\sqrt{G_1 \cdot G_2}}.$$

(Eingegangen 3. November 1918.)

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Leiter der wissenschaftlichen Laboratorien bei den Farbenfabriken in Elberfeld Dr. Fritz Hofmann zum Direktor des Instituts für Kohlenforschung in Breslau, der a. o. Professor an der Universität Breslau Dr. Julius v. Braun zum ord. Professor der Chemie an

der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin, der Privatdozent an der Universität Münster Dr. Aloys Timpe zum ord. Professor der Mathematik an der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Heinrich Faßbender zum stellvertretenden a. o. Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Riga, der ord. Professor der darstellenden Geometrie und der Mathematik an der Technischen Hochschule München Dr. Sebastian Finsterwalder zum ord. Professor der Geodäsie an der Universität Berlin und Direktor des Geodätischen Instituts auf dem Telegraphenberg bei Potsdam.

Nobelpreise: Der Nobelpreis der Physik für 1917 wurde dem ord. Professor der Physik (natural philosophy) an der Universität Edinburgh Dr. Charles Glover Barkla verliehen.

Gestorben: Der ord. Professor für pharmazeutische Chemie und Toxikologie an der Universität Turin Dr. Icilio Guareschi, der ord. Professor für Theorie und Anwendungen des elektromagnetischen Feldes an der Universität Utrecht Dr. H. du Bois, der Privatdozent für Geophysik und Geologie an der Universität Breslau und Leiter der Erdbebenwarte und des geophysikalischen Laboratoriums daselbst Professor Dr. Georg von dem Borne, der ord. Professor für Elektrotechnik an der Universität La Plata, frühere Privatdozent an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Konrad Simons.

Angebote.

Für die wissenschaftliche und technische Bearbeitung von Fragen aus dem Gebiete der Schwachstromkabeltechnik

1—2 Physiker

oder

diplom. Ingenieure

sofort gesucht. Angebote mit Angabe der Gehaltsansprüche, der bisherigen Tätigkeit und des Militärverhältnisses erbeten unter **S. H. 530** an den Verlag dieser Zeitschr. S. Hirzel, Leipzig, Königstraße 2.

Gesuche.

Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung, mit guten Kenntnissen auf den Gebieten der Radioaktivität, Elektronik und Elektrotechnik sucht Stellung an einem Forschungslaboratorium eines größeren industriellen Unternehmens. (Invalide, linke Unterschenkelprothese.)

Anschrift: **Dr. Rudolf Thaller, Gmunden O. Ö.**

Physiker,

absolviert, mit Doktorat aus Mathematik, militärfrei, Laboratoriumspraxis, sucht Anstellung. Angebote unter **S. H. 531** an den Verlag der Physik. Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstr. 2.

Physiker (promoviert),

bisher auf akustischem und ballistischem Gebiet gearbeitet, sucht Stellung an größerem industriellen oder wissenschaftlichen Institut. Angebote unter **S. H. 533** mit Gehaltsangabe an den Verlag der Physikal. Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstraße 2.

Promovierter Physiker,

mehrjährige Tätigkeit als Hochschulassistent und im Marinebetrieb, sucht neuen Wirkungskreis zur Bearbeitung physikalisch-technischer Aufgaben in der Privatindustrie. Ausführliche Angebote erbeten unter **S. H. 534** an die Physikalische Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstraße 2.

Absolvierter Physiker

(Dr. phil. Universitätsassistent), praktisch begabt, guter Zeichner, sucht nach Kriegsende Anstellung in größerem techn. Betrieb. Anträge mit Bedingungen unter **G. H.** an den Verlag S. Hirzel, Leipzig, Königstr. 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

J. E. Lilienfeld, Ergänzende Mitteilung zu der Arbeit: Untersuchungen über das kontinuierliche Röntgenspektrum.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Fabrik physikalischer Apparate bekannten Namens

mit großem Lager fertiger und halbfertiger Apparate und gut eingerichtetem wissenschaftlichen Laboratorium steht wegen anderweitiger Unternehmungen zum Verkauf. Für Wissenschaftler günstige Gelegenheit zur Gründung eigenen Unternehmens. Gefl. Angebote unter S. H. 532 an die Expedition dieser Zeitschrift, Leipzig, Königstraße 2.

Physiker oder Dipl.-Ingenieur

gesucht für Arbeiten auf dem Gebiet der

Gasentladungen.

Bewerbungen erbeten an

Siemens & Halske A.-G. Wernerwerk, Abt. M.

Siemensstadt bei Berlin.

Kugelgelenkkopf. D.R.P. 250214.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. s.

Preislisten kostenlos.